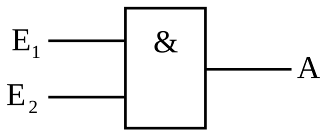
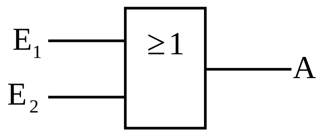
University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Digitaltechnik KV-Diagramm	Tutorium KV-01 Stand: 19.03.2006; R0

Die Digitaltechnik unterscheidet sich von der Analogtechnik dahingehend, dass sie nur zwei (Spannungs)Zustände kennt: nämlich 0V (binär 0) oder 5V (binär 1). Diese beiden Zustände werden durch verschiedene logische Verknüpfungen miteinander verarbeitet. Dabei gibt es drei Möglichkeiten dies darzustellen: entweder mit einem Schaltbild, mit einer Wahrheitstabelle oder mit einer Gleichung.

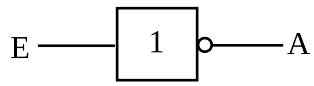
Schaltbild:



UND-Gatter



ODER-Gatter



Inverter

Wahrheitstabelle:

E_1	E_2	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

E_1	E_2	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

E	A
0	1
1	0

Gleichung:

$$A = E_1 \wedge E_2 \qquad A = E_1 \vee E_2 \qquad A = \overline{E}$$

Bei einem UND-Gatter nimmt der Ausgang A erst dann den logischen Zustand 1 an, wenn beide Eingänge $\left(E_1 \wedge E_2\right)$ den Zustand 1 haben. Bei einem ODER-Gatter muss nur einer der Eingänge den Zustand 1 annehmen (≥ 1), dann hat auch der Ausgang den Zustand 1. Ein Inverter (oder auch Negierung) invertiert das Eingangssignal: Aus einer 0 macht er eine 1, aus einer 1 eine 0.
Für gewöhnlich werden mehr als nur zwei Variablen (Eingänge) miteinander verknüpft. Die Anzahl der möglichen Schaltzustände hängt von der Anzahl der Variablen ab. Es gilt: $\text{Anzahl Schaltzustände} = 2^{\text{Anzahl der Variablen}}$. Die Basis 2 rührt daher, weil man im binären System nur zwei Zustände kennt (0 oder 1). Das bedeutet, dass man bei 4 Variablen $2^4 = 16$ Schaltzustände hat.
Diese Schaltzustände sind logisch miteinander verknüpft. Ein Beispiel (Prüfung 2004/1; Aufgabe 8) soll dies einmal verdeutlichen:

Gegeben ist die auf der nächsten Seite abgebildete Wertetabelle. Sie stellt den Zusammenhang zwischen den vier Eingangsvariablen (A, B, C und D) sowie der Ausgangsvariablen S dar. Entscheidend ist lediglich, wann der Ausgang S den Zustand 1 annimmt. Man muss also für jede Zeile, in der S den Zustand 1 hat, eine Gleichung aufstellen und all diese Gleichungen disjunktiv (ODER) miteinander verknüpfen. Die einzelnen Eingangsvariablen sind miteinander konjunktiv (UND) verbunden. Es muss ein bestimmter Zustand für A UND für B UND für C UND für D gelten, damit S den Zustand 1 hat. Schreibt man alle Gleichungen für $S = 1$ disjunktiv verknüpft auf, so kann man diese nach den Gesetzen von de Morgan vereinfachen. Allerdings ist dies ein sehr umständliches und zeitaufwändiges Verfahren, weswegen man hier auf eine „grafische“ Lösung zurückgreift: dem KV-Diagramm.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Die Gleichung für die Ausgangsvariable S lautet:

$$S = \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge C \wedge \overline{D}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D\right)$$
$$\vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D\right) \vee \left(A \wedge B \wedge C \wedge D\right)$$

Weil alle Eingangsvariablen miteinander UND-verknüpft sind, müssen die Nullen bei A und B negiert werden, damit S den Zustand 1 annimmt. Bei den anderen Zeilen ist es genauso.

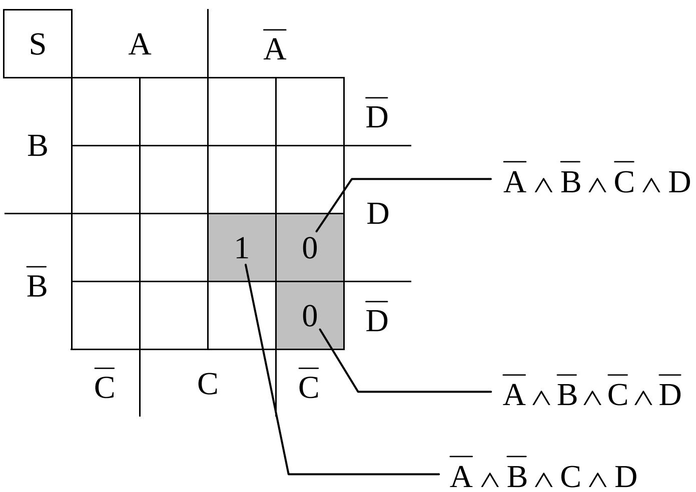
Für das KV-Diagramm zieht man alle Zeilen (Gleichungen) heran, also auch jene, bei denen S den Zustand 0 hat. Die vier Eingangsvariablen ergeben allerdings 16 Zustände, von denen in dieser Wertetabelle 5 fehlen. Diese sind so genannte „don’t care“-Terme; sie sind für die Ausgangsvariable nicht von Bedeutung, wohl aber für die Vereinfachungen im KV-Diagramm. Dieses sieht wie folgt aus:

Die mit dem * gekennzeichneten Felder sind die don’t care-Terme mit den Gleichungen:

A	B	C	D	S
0	0	1	0	*
0	1	0	0	*
0	1	1	1	*
1	1	0	1	*
1	1	1	0	*

S	A		$\overline{A}$		
B	*	*	1	*	$\overline{D}$
B	0	1	*	0	D
$\overline{B}$	1	1	1	0	D
$\overline{B}$	0	0	*	0	$\overline{D}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$	

Die Einsen und Nullen werden im KV-Diagramm dort eingetragen, wo sie auch in der Wertetabelle bei der entsprechenden Eins oder Null sind. In der ersten Zeile steht eine 0 bei den Eingangsvariablen $\overline{A}$ UND $\overline{B}$ UND $\overline{C}$ UND $\overline{D}$. Im KV-Diagramm entspricht diese Koordinate der rechten unteren Ecke.

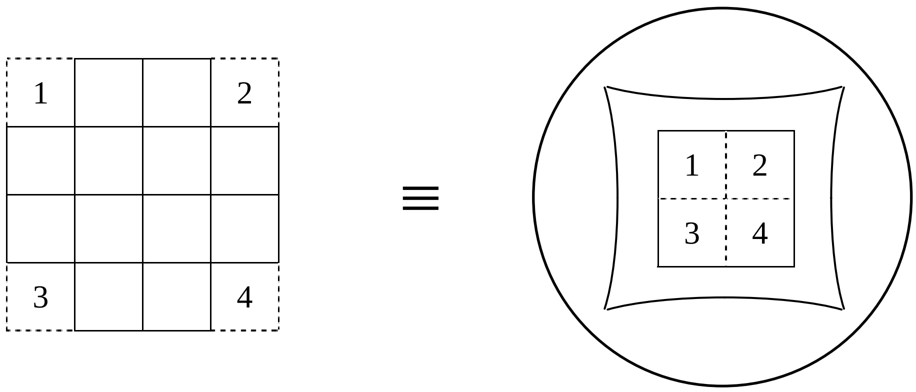


Die zweite Zeile entspricht wiederum $S = 0$. Sie gilt, wenn $\overline{A}$ UND $\overline{B}$ UND $\overline{C}$ UND D als Eingangsvariablen anliegen. Dieses Feld liegt oberhalb der Lösung aus der ersten Zeile (rechte untere Ecke), weil dort die Variable D und nicht $\overline{D}$ liegt. Alle anderen Felder werden nach derselben Methode gefüllt.

In der dritten Zeile hat S den Zustand 1. Das gilt für die Variablen $\overline{A}$ UND $\overline{B}$ UND C UND D. Dieses trägt man also auch in das Feld $\left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D\right)$ ein.

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Digitaltechnik KV-Diagramm	Tutorium KV-03 Stand: 19.03.2006; R0

Die Vereinfachung mittels KV-Diagramm erfolgt über das Zusammenlegen mehrerer nebeneinander liegender Einsen. Das bedeutet, man bildet Einser-Pakete in Form von 1er-, 2er-, 4er- oder 8er-Paketen; also nur Pakete zur Basis 2: 2^0, 2^1, 2^2 oder 2^3. Es gibt auch 16er-Pakete, diese tauchen bei 4 Variablen nur (so gut wie) nie auf, denn das würde bedeuten, dass für jede der 16 Schaltzustände eine 1 raus kommt. Das besondere beim KV-Diagramm ist: Es ist eine Kugel. Man muss quasi um den Rand herum denken.



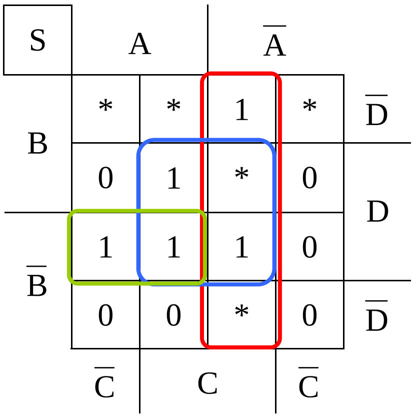
(vgl.: Heering / Bressler / Gutekunst: Elektronik für Ingenieure; Springer Verlag; 3. Auflage 1998; Kapitel 11 Grundlagen der digitalen Schaltungstechnik)

Das bedeutet: Alle äußeren Zeilen und Spalten liegen nebeneinander und die Pakete können „übergreifend“ eingesetzt werden. Sie werden markiert und die (vereinfachte) Gleichung dafür aufgeschrieben. Hierbei helfen die don’t care-Terme: Sie können als eine 1 angesehen werden und mit in die Pakete eingehen. Das ist wichtig, denn man muss so große Pakete wie nur möglich bilden, um die beste Vereinfachung zu bekommen. Das ganze wird für dieses Beispiel einmal durchgeführt:

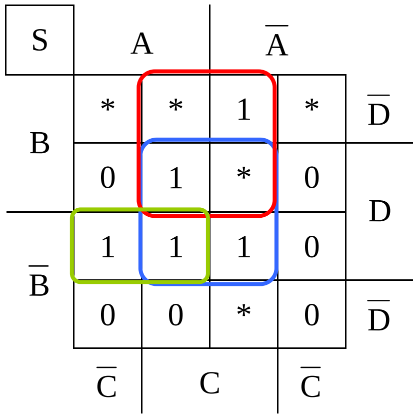
S	A		$\overline{A}$		
B	*	*	1	*	$\overline{D}$
B	0	1	*	0	D
$\overline{B}$	1	1	1	0	D
$\overline{B}$	0	0	*	0	$\overline{D}$
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$	

Das erste Paket ist die 4er-Kobination in der obersten Zeile. Sie entspricht der logischen Verknüpfung $B \wedge \overline{D}$.
Das zweite Paket ist ebenfalls eine 4er-Kombination in der Mitte: $C \wedge D$. Damit deckt man die drei Einsen ab.

Als letztes bleibt eine Eins an der Koordinate $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D$ übrig. Sie kann nur mit der rechts benachbarten Eins in ein Paket eingebracht werden. Das bedeutet: Die Pakete dürfen sich untereinander überlappen. Somit lautet das letzte 2er Paket: $A \wedge \overline{B} \wedge D$.
Man erkennt sofort, dass man eine Variable mehr braucht, um ein 2er-Paket zu erfassen – nämlich drei. Daher sollte man so große Pakete wie nur möglich bilden, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.
Um die eine Eins in der obersten Zeile in ein Paket einzubeziehen, gibt es mehrere Varianten. Man könnte auch ein 4er-Paket senkrecht bilden $\overline{A} \wedge C$ (2. Variante) oder ein quadratisches 4er-Paket mit den Koordinaten $B \wedge C$ (3. Variante).



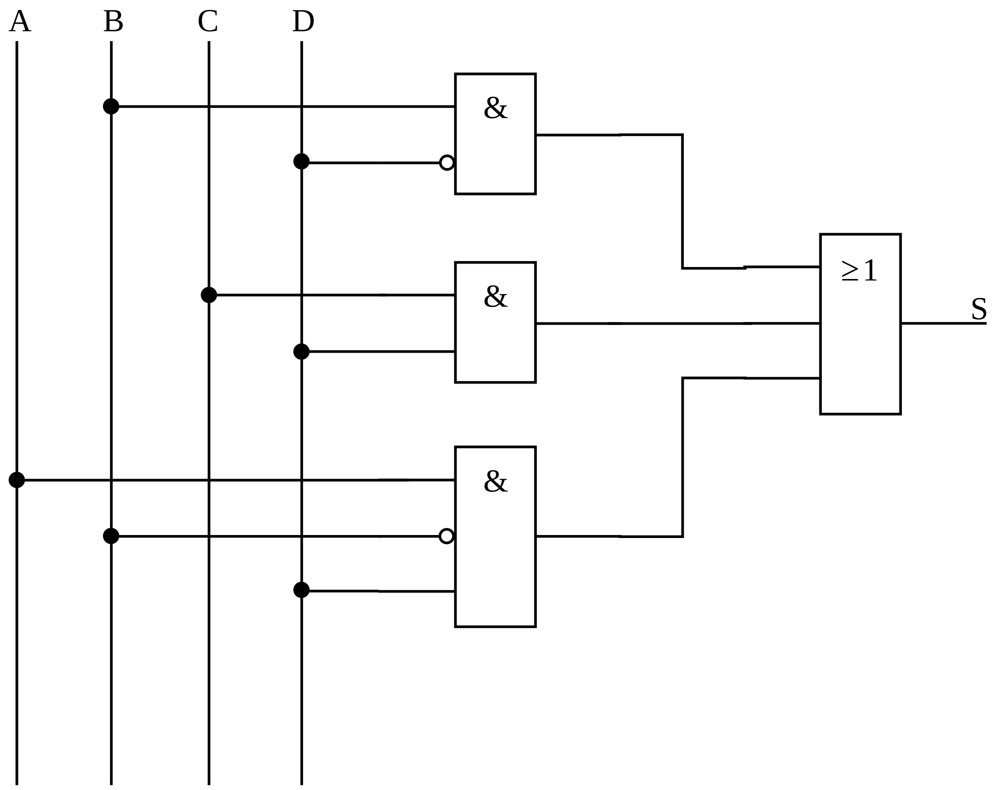
2. Variante



3. Variante

Ganz gleich für welche Variante man sich entscheidet, es ist immer die einfachste logische Gleichung, die hierbei raus kommt. Man hat nur drei vereinfachte Pakete, die sich zwar unterscheiden, aber die Anzahl der Variablen ist die gleiche. Daher kann man den Ausdruck für S wie folgt vereinfachen: $S = \left(B \wedge \overline{D}\right) \vee (C \wedge D) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge D\right)$.

Das ganze muss jetzt noch in ein Schaltbild umgezeichnet werden (siehe Schaltbilder auf Seite KV-01). Um dies relativ einfach zu gestalten, bietet es sich an, alle Leitungen der Eingangsvariablen als senkrechte Linien darzustellen und die Querverbindungen zur entsprechenden Schaltung an der jeweiligen Variablen anzuknüpfen.



Dieses Schaltbild erfüllt die oben angegebene Gleichung für S.

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Digitaltechnik KV-Diagramm	Tutorium KV-05 Stand: 19.03.2006; R0

Das Umsetzen der Wertetabelle in das KV-Diagramm ist ein sehr zeitaufwändiges Verfahren. Man muss in jeder Zeile den Zustand (0 oder 1) der Ausgangsvariablen mit dem Zustand der Eingangsvariablen in das KV-Diagramm eintragen. Es gibt hierbei einen Weg, welcher genau diesen Zeitaufwand drastisch minimiert.

Man muss als erstes die binäre Darstellung der Eingangsvariablen in eine dezimale Schreibweise umwandeln. Dazu ein Beispiel: In der dezimalen Schreibweise ist man an die Basis 10 gebunden. Man kann jede Zahl in ihre Bestandteile aufschlüsseln und diese ergeben addiert die ursprüngliche Zahl. Die Zahl 3752 setzt sich zusammen aus $3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 1$ (sprich: drei Tausender plus sieben Hunderter plus fünf Zehner plus zwei Einer). In einer anderen Schreibweise sieht das wie folgt aus: $3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$. Die Basis ist also das dezimale System. In der binären Schreibweise ist die Basis Zwei, weil es nur zwei Zustände gibt (0 oder 1). Auch hier ist die niederwertigste Zahl ganz rechts, daher beginnt man auch dort. Die Zahl 1011 in der binären Schreibweise bedeutet: $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$.

Man erweitert die Wertetabelle um die Spalte der Dezimalzahlen, welche sich wie folgt ergeben:

Dezimal	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
13	1	1	0	1	0
15	1	1	1	1	1

Weil es vier Variablen sind, ergeben sich 16 Schaltzustände (0 bis 15). Man erkennt sofort, welche Dezimalzahlen fehlen. Diese sind die so genannten don’t care-Terme – in diesem Fall 2, 4, 7, 12 und 14.

Was man jetzt noch benötigt, ist die Übersicht der Position der jeweiligen Dezimalzahl im KV-Diagramm. Belässt man die äußere Beschriftung des Diagramms, nämlich die erste Variable in der oberen Zeile, alle anderen entgegengesetzt im Uhrzeigersinn angelegt, kann man sofort den Zustand der Variablen S in das KV-Diagramm eintragen.

Die Übersicht der Dezimalzahlen im KV-Diagramm sieht wie folgt aus:

S	A		$\overline{A}$		
B	12	14	6	4	$\overline{D}$
B	13	15	7	5	D
$\overline{B}$	9	11	3	1	D
$\overline{B}$	8	10	2	0	$\overline{D}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$	

$\Rightarrow$

S	A		$\overline{A}$		
B	*	*	1	*	$\overline{D}$
B	0	1	*	0	D
$\overline{B}$	1	1	1	0	D
$\overline{B}$	0	0	*	0	$\overline{D}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$	

Man erkennt die don’t care-Terme an den Positionen 2, 4, 7, 12 und 14. Weiterhin alle Einsen an den (Dezimal)Positionen 3, 6, 9, 11 und 15. Die anderen Felder müssen zwangsläufig alle Nullen in der Wertetabelle sein: also 0, 1, 5, 8, 10 und 13.

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Digitaltechnik KV-Diagramm	Tutorium Ü-KV-01 Stand: 19.03.2006; R0

Aufgabe 1:

Entwickle zu den angegebenen Wertetabellen das dazugehörige KV-Diagramm und entwickle daraus die einfachste logische Verknüpfung für die Ausgangsvariable S. Zeichne das entsprechende Schaltbild auf.

a)

W	X	Y	Z	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

b)

W	X	Y	Z	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

c)

A	B	C	D	S
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

d)

D	C	B	A	S
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1