University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Prüfung 2008-1_1 Aufgabe 2	Lösung Seite-01 Stand: 17.04.2008; R2

Die Gleichung für das Berechnen des Effektivwertes einer periodischen Wechselspannung lautet: $u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [u(t)]^2 dt}$. Die Gleichung $u(t)$ ist eine abschnittweise definierte Funktion über sechs Bereiche

mit folgenden Funktionswerten: $u(t) = \begin{cases} 0V \text{ für } 0 \geq t > 1 \\ 3V \text{ für } 1 \geq t > 4 \\ -1V \text{ für } 4 \geq t > 6 \\ -2V \text{ für } 6 \geq t > 8 \\ -8V \text{ für } 8 \geq t > 9 \\ 0V \text{ für } 9 \geq t > 10 \end{cases}$

Man muss die abschnittweise Funktion $u(t)$ in das Integral einsetzen. Daraus ergeben sich sechs einzelne Integrale: $u_{eff}^2 = \frac{1}{10} \cdot \left\{ \int_0^1 (0V)^2 dt + \int_1^4 (3V)^2 dt + \int_4^6 (-1V)^2 dt + \int_6^8 (-2V)^2 dt + \int_8^9 (-8V)^2 dt + \int_9^{10} (0V)^2 dt \right\}$

Die Wurzel ist auf die andere Seite gebracht worden und steht nun dort zum Quarat. Die konstanten Funktionswerte werden beim Integrieren vor das Integralzeichen gezogen. Integriert wird somit letztlich die Zahl 1 über die jeweiligen Grenzen. Allgemein gilt: $\int_a^b 1 dt = t\Big|_a^b = t \cdot (b-a)$. Dementsprechend:

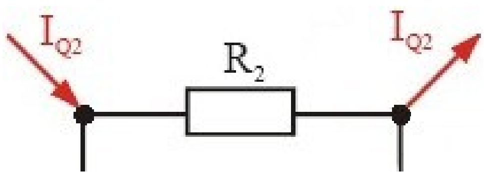
$$u_{eff}^2 = \frac{1}{10} \cdot \{ \underbrace{0V^2 \cdot (1-0)} + \underbrace{9V^2 \cdot (4-1)} + \underbrace{1V^2 \cdot (6-4)} + \underbrace{4V^2 \cdot (8-6)} + \underbrace{64V^2 \cdot (9-8)} + \underbrace{0V^2 \cdot (10-9)} \}$$

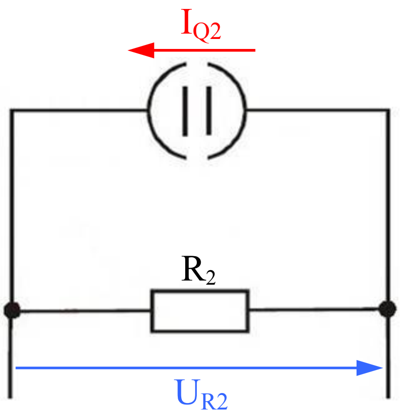
$$\Leftrightarrow u_{eff}^2 = \frac{1}{10} \cdot \{ 0 + 27V^2 + 2V^2 + 8V^2 + 64V^2 + 0 \}$$

$$\Leftrightarrow u_{eff}^2 = \frac{1}{10} \cdot 101V^2 = 10{,}1V^2$$

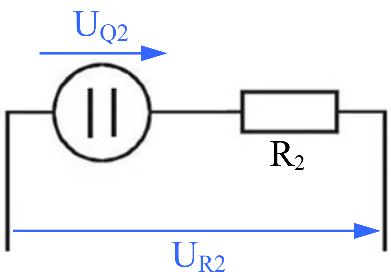
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{u_{eff}}} = \sqrt{10{,}1V^2} \approx \underline{\underline{3{,}17V}}$$

Für das Umwandeln der Stromquelle I_{Q2} in eine Spannungsquelle U_{Q2} nimmt man die Stromquelle samt Innenwiderstand R_2 aus der Schaltung heraus und betrachtet diese im Leerlauf.



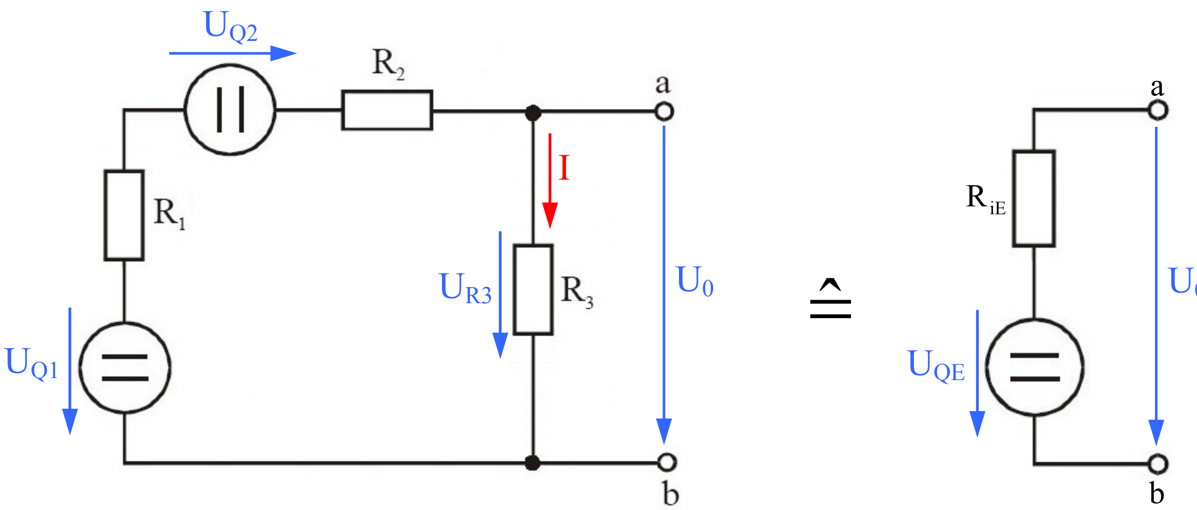


Im Leerlauf fließt der komplette Strom der Stromquelle über den Innenwiderstand R_2; und zwar von links nach rechts. Also fällt auch die Leerlaufspannung der Stromquelle – hier U_{R2} – von links nach rechts ab. Ersetzt man die Stromquelle durch eine Spannungsquelle, so muss auch diese Leerlaufspannung von links nach rechts abfallen. Der einzige Widerstand zwischen diesen Klemmen ist der Innenwiderstand der Stromquelle. Also ist dies auch der Innenwiderstand der Spannungsquelle.

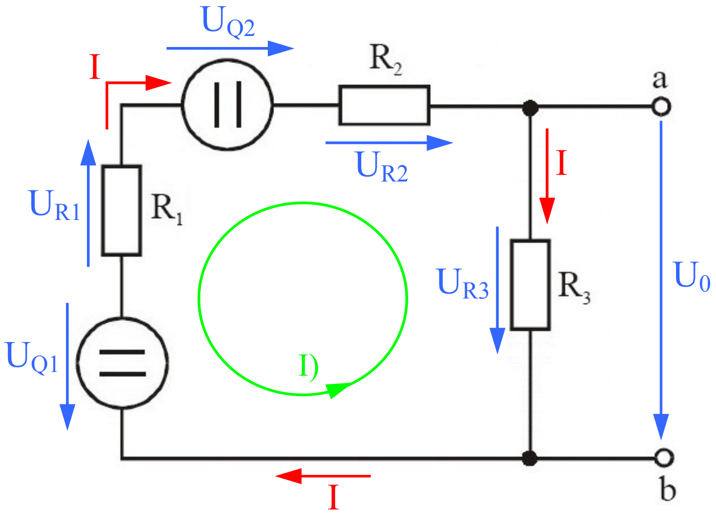


Die Leerlaufspannung U_{R2} wird berechnet, in dem der komplette Strom aus der Stromquelle I_{Q2} durch den Widerstand R_2 fließt (Leerlauf). Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes kann dieser Spannungsabfall am Widerstand R_2 berechnet werden: $U_{R2} = I_{Q2} \cdot R_2 = 50\text{mA} \cdot 100\Omega = 5\text{V}$. Dementsprechend ist auch $\underline{\underline{U_{Q2}}} = U_{R2} = \underline{\underline{5\text{V}}}$.

Die Spannungsquelle U_{Q2} wird als Ersatz für die Stromquelle I_{Q2} eingesetzt; liegt also genau an derselben Stelle innerhalb der Schaltung. Damit ist die Gesamtschaltung zu einem Strang reduziert worden, durch den ein einziger Strom I fließt. Die Richtung dieses Stromes ist frei wählbar, denn es sind zwei Quellen vorhanden und beide Quellen geben Ströme ab. An der Ersatzquelle fällt dieselbe Leerlaufspannung zwischen den Klemmen a und b ab wie in der Originalschaltung.



Die Größe der Ersatzspannungsquelle ist die Spannung am Widerstand R_3. Diese Spannung fällt zwischen den Klemmen a und b ab.

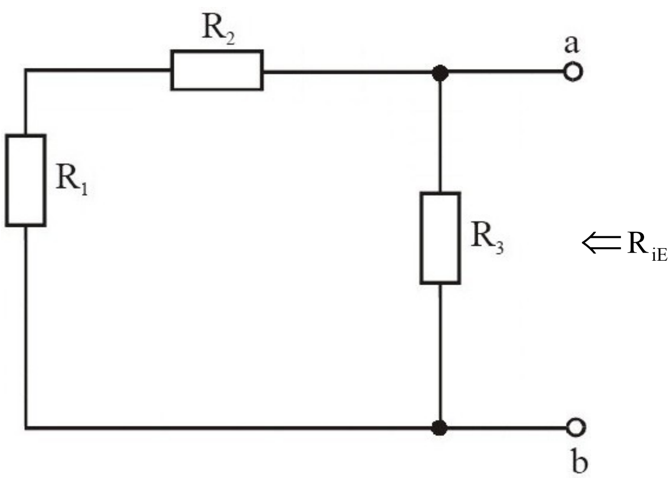


Mittels Masche I) kann der unbekannte Strom I berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
& -U_{R3} - U_{R2} - U_{Q2} - U_{R1} + U_{Q1} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 + U_{Q1} - U_{Q2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & +U_{Q1} - U_{Q2} = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) \\
\Leftrightarrow\ & I = \frac{U_{Q1} - U_{Q2}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U_{Q1} - I_{Q2} \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30V - 50mA \cdot 100\Omega}{150\Omega + 100\Omega + 250\Omega} = \frac{25V}{500\Omega} = 50mA
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des Stromes in diesem Strang kann die Spannung am Widerstand R_3 berechnet werden: $\underline{\underline{U_0}} = U_{R3} = I \cdot R_3 = 50mA \cdot 250\Omega = \underline{\underline{12{,}5V}}$.

Für die Berechnung des Ersatzinnenwiderstandes R_{iE} werden alle Spannungsquellen kurzgeschlossen, alle Stromquellen aufgetrennt:

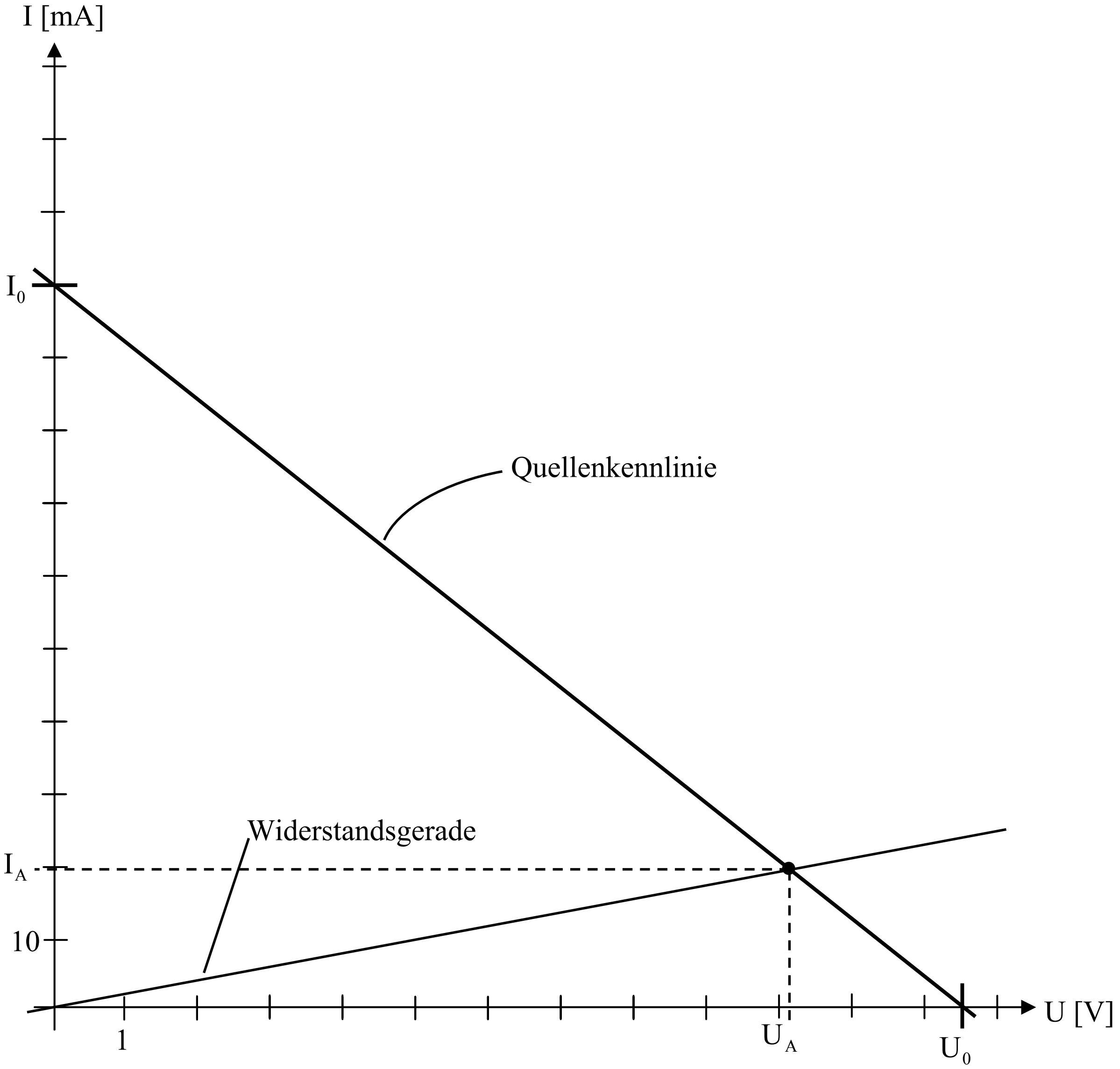


$$
\begin{aligned}
& R_{iE} = (R_1 + R_2) \| R_3 = (150\Omega + 100\Omega) \| 250\Omega \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{R_{iE} = 125\Omega}}
\end{aligned}
$$

Der für die zeichnerische Lösung benötigte Kurzschlussstrom wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$
I_0 = \frac{U_0}{R_{iE}} = \frac{12{,}5V}{125\Omega} = 100mA
$$

Die Quellenkennlinie ist durch die Punkte U_0 und I_0 definiert. Diese wird als erstes in das Diagramm eingezeichnet. Die Widerstandsgerade für den Abschlusswiderstand R_a wird ebenfalls über zwei Punkte festgelegt: Der eine ist der Ursprung; der andere frei wählbar. Er ergibt sich mittels einer Vorgabe (entweder Strom oder Spannung) und derr resultierenden Rechnung hieraus. Es gilt nach dem ohmschen Gesetz: $U = R \cdot I$. Setzt man den Abschlusswiderstand R_a in diese Gleichung ein und gibt einen Wert für Strom oder Spannung vor, so kann die unbekannte andere Größe ermittelt werden.
Gewählt: $I = 10\text{mA}$. Daaus ergibt sich folgende Spannung an R_a: $U = R_a \cdot I = 500\Omega \cdot 10\text{mA} = 5\text{V}$



Aus der zeichnerischen Lösung erhält man die Wete für U_A und I_A. Diese sind hier: $\underline{\underline{U_A = 10{,}15\text{V}}}$ und $\underline{\underline{I_A = 20\text{mA}}}$.

Rechnerische Werte: $\underline{\underline{I_A}} = \dfrac{U_{QE}}{R_{iE} + R_a} = \dfrac{12{,}5\text{V}}{125\Omega + 500\Omega} = \underline{\underline{20\text{mA}}}$

$$\underline{\underline{U_A}} = I_A \cdot R_a = 20\text{mA} \cdot 500\Omega = \underline{\underline{10\text{V}}}$$

Um allgemein eine Resonanzfrequenz zu ermitteln, muss man die Gleichung der Gesamtimpedanz aufstellen, nach Realteil und Imaginärteil auflösen und den Imaginärteil Null setzen. Für die vorliegende Schaltung – ein Kondensator in Reihe mit Widerstand parallel zur Induktivität – gilt folgender Ansatz:

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{(\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)\cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{(R + jX_C)\cdot jX_L}{R + jX_C + jX_L} = \frac{-X_C X_L + jX_L R}{R + j\cdot(X_C + X_L)}$$

Dieser Ausdruck muss konjugiert komplex erweitert werden, damit man den Realteil vom Imaginäreil trennen kann:

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{-X_C X_L + jX_L R}{R + j\cdot(X_C + X_L)}\cdot\frac{R - j\cdot(X_C + X_L)}{R - j\cdot(X_C + X_L)} = \frac{X_L R\cdot(X_C + X_L) - R\cdot X_C X_L}{R^2 + (X_C + X_L)^2} + j\cdot\frac{X_L R^2 + X_C X_L\cdot(X_C + X_L)}{R^2 + (X_C + X_L)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ges} = \frac{X_L{}^2 R}{R^2 + (X_C + X_L)^2} + j\cdot\frac{X_L R^2 + X_C{}^2 X_L + X_C X_L{}^2}{R^2 + (X_C + X_L)^2}$$

Um den Imaginärteil Null zu setzen reicht es aus, wenn der Zähler Null gesetzt wird:

$$X_L R^2 + X_C{}^2 X_L + X_C X_L{}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r L\cdot R^2 + \left(-\frac{1}{\omega_r C}\right)^2\cdot\omega_r L + \left(-\frac{1}{\omega_r C}\right)\cdot(\omega_r L)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r L\cdot R^2 + \frac{1}{\omega_r C}\cdot\frac{\omega_r L}{\omega_r C} - \frac{\omega_r L}{\omega_r C}\cdot\omega_r L = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega_r C)^2\omega_r L\cdot R^2 + \omega_r L - (\omega_r L)^2\cdot\omega_r C = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r{}^3\cdot C^2 L R^2 - \omega_r{}^3\cdot L^2 C + \omega_r L = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r{}^2\cdot C^2 L R^2 - \omega_r{}^2\cdot L^2 C + L = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r{}^2\cdot\left(C^2 L R^2 - L^2 C\right) + L = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r{}^2 = -\frac{L}{C^2 L R^2 - L^2 C} = \frac{L}{L^2 C - C^2 L R^2}$$

$$\Leftrightarrow (2\pi)^2\cdot f_r{}^2 = \frac{L}{L^2 C - C^2 L R^2}$$

$$\Leftrightarrow f_r = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{L}{L^2 C - C^2 L R^2}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{10\text{mH}}{(10\text{mH})^2\cdot 1\mu\text{F} - (1\mu\text{F})^2\cdot 10\text{mH}\cdot(50\Omega)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{f_r}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{133{,}\overline{3}\cdot 10^6\,\tfrac{1}{s^2}} \approx \underline{\underline{1{,}83\text{kHz}}}$$

Demnach folgt: $X_L = \omega_r\cdot L = 2\pi\cdot f_r\cdot L = 2\pi\cdot 1{,}83\text{kHz}\cdot 10\text{mH} = 115\Omega$ und

$$X_C = -\frac{1}{\omega_r\cdot C} = -\frac{1}{2\pi\cdot f_r\cdot C} = -\frac{1}{2\pi\cdot 1{,}83\text{kHz}\cdot 1\mu\text{F}} = -86{,}97\Omega$$

Mit allen Angaben kann nun die Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{ges}$ berechnet werden. Den Imaginärteil kann man von vorn herein Null setzen, denn dies war der Ansatz zur Berechnung der Resonanzfrequenz:

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{X_L{}^2 R}{R^2 + (X_C + X_L)^2} + j \cdot \frac{X_L R^2 + X_C{}^2 X_L + X_C X_L{}^2}{R^2 + (X_C + X_L)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ges} = \frac{(115\Omega)^2 \cdot 50\Omega}{(50\Omega)^2 + (115\Omega - 86{,}97\Omega)^2} + j \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ges} = 201{,}25\Omega$$

Das Ergebnis wird in der Form Betrag und Phase benötigt. Also wandelt man den Realteil und Imaginärteil dahingehend um, bzw. der Betrag liegt bereits vor, denn es gilt:

$$\underline{\underline{|\underline{Z}_{ges}|}} = \sqrt{[\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{ges}\}]^2 + [\mathrm{Im}\{\underline{Z}_{ges}\}]^2} = \sqrt{[201{,}25\Omega]^2 + [0]^2} = \sqrt{40{,}5k\Omega^2} = \underline{\underline{201{,}25\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{\underline{Z}_{ges}}}} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_{ges}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{ges}\}}\right) = \arctan\left(\frac{0}{201{,}25\Omega}\right) = \arctan(0) = \underline{\underline{0°}}$$

Das Ergebnis lautet dementsprechend: $\underline{\underline{\underline{Z}_{ges} = 201{,}25\Omega \cdot e^{j0°}}}$

Die Scheinleistung einer Quelle ist durch die Gleichung $\underline{S}_Q = -\underline{U}_Q \cdot \underline{I}_Q^*$ definiert. Wie im reellen auch, kann man hier die Leistung über den Widerstand und das Quadrat des Stromes bestimmen: $\underline{S}_Q = -\underline{U}_Q \cdot \underline{I}_Q^* = \underbrace{-\underline{Z}_{ges} \cdot \underline{I}_Q}_{-\underline{U}_Q} \cdot \underline{I}_Q^* = -\underline{Z}_{ges} \cdot \left|\underline{I}_Q\right|^2$. Die Gesamtimpedanz ist bei dieser Parallelschaltung wie folgt definiert: $\underline{Z}_{ges} = \dfrac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \dfrac{(10\Omega + j100\Omega)\cdot(-j200\Omega)}{10\Omega + j100\Omega - j200\Omega} = \dfrac{20000\Omega^2 - j2000\Omega^2}{10\Omega - j100\Omega}$

Um diesen Ausdruck in Realteil und Imaginärteil umzuwandeln, muss man ihn mit der konjugiert komplexen Erweiterung multiplizieren.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_{ges} &= \frac{20000\Omega^2 - j2000\Omega^2}{10\Omega - j100\Omega} \cdot \frac{10\Omega + j100\Omega}{10\Omega + j100\Omega} \\
&= \frac{\left(20000\Omega^2 \cdot 10\Omega\right) + \left(\left(-j2000\Omega^2\right)\cdot j100\Omega\right)}{(10\Omega)^2 + (100\Omega)^2} + j \cdot \frac{\left(20000\Omega^2 \cdot 100\Omega\right) + \left(\left(-2000\Omega^2\right)\cdot 10\Omega\right)}{(10\Omega)^2 + (100\Omega)^2} \\
&= \frac{200000\Omega^3 + 200000\Omega^3}{100\Omega^2 + 10000\Omega^2} + j \cdot \frac{2000000\Omega^3 - 20000\Omega^3}{100\Omega^2 + 10000\Omega^2} = \frac{400000\Omega^3}{10100\Omega^2} + j \cdot \frac{1980000\Omega^3}{10100\Omega^2}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ges} = 39{,}60\Omega + j196{,}04\Omega$$

Also: $\underline{\underline{S}}_Q = -\underline{Z}_{ges} \cdot \left|\underline{I}_Q\right|^2 = -(39{,}60\Omega + j196{,}04\Omega)\cdot(1A)^2 = \underline{\underline{-39{,}60W - j196{,}04var}}$

Um die einzelnen Leistungen der jeweiligen Impedanz zu berechnen, setzt man folgenden Ansatz an: $\underline{S}_{Z1} = \underline{U}_Q \cdot \underline{I}_1^* = \underline{Z}_1 \cdot \left|\underline{I}_1\right|^2$. Allerdings ist die Unbekannte hier der Strom durch die Impedanz $\underline{Z}_1$. Diesen kann man zum Beispiel mittels Stromteilerregel bestimmen: $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}_Q$. Weil hier nur der Betrag von $\underline{I}_1$ benötigt wird, kann diese Formel mit Beträgen angesetzt werden: $\left|\underline{I}_1\right| = \left|\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\right| \cdot \left|\underline{I}_Q\right| = \dfrac{\left|\underline{Z}_2\right|}{\left|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right|} \cdot \left|\underline{I}_Q\right|$.

Der Betrag von $\underline{Z}_2$ ist der Zahlenwert selbst; also 200Ω. Der Betrag der Summe aus $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ wird mittels des Satzes von Pythagoras bestimmt. Für die Summe ergibt sich: $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 10\Omega + j100\Omega - j200\Omega$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 10\Omega - j100\Omega$$

Demzufolge berechnet man den Betrag:

$$
\begin{aligned}
\left|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right| &= \sqrt{\left[\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\}\right]^2} \\
&= \sqrt{[10\Omega]^2 + [100\Omega]^2} = \sqrt{10100\Omega^2}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right| \approx 100{,}50\Omega$$

Das gleiche gilt auch für den Betrag von $\underline{Z}_1$:

$$
\begin{aligned}
\left|\underline{Z}_1\right| &= \sqrt{\left[\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\}\right]^2} \\
&= \sqrt{[10\Omega]^2 + [100\Omega]^2} = \sqrt{10100\Omega^2}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{Z}_1\right| \approx 100{,}50\Omega$$

Setzt man alle Werte in die Formel ein, so erhält man:

$$\left|\underline{I}_1\right| = \frac{\left|\underline{Z}_2\right|}{\left|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right|} \cdot \left|\underline{I}_Q\right| = \frac{200\Omega}{100{,}50\Omega} \cdot 1\text{A} = 1{,}99\text{A} \quad \text{bzw.} \quad \left|\underline{I}_2\right| = \frac{\left|\underline{Z}_1\right|}{\left|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right|} \cdot \left|\underline{I}_Q\right| = \frac{100{,}50\Omega}{100{,}50\Omega} \cdot 1\text{A} = 1\text{A}$$

Jetzt kann man die einzelnen Scheinleistungen berechnen:

$$\underline{\underline{\underline{S}_{Z1}}} = \underline{Z}_1 \cdot \left|\underline{I}_1\right|^2 = (10\Omega + \text{j}100\Omega) \cdot (1{,}99\text{A})^2 = \underline{\underline{39{,}60\text{W} + \text{j}396{,}01\text{var}}} \quad \text{und}$$

$$\underline{\underline{\underline{S}_{Z2}}} = \underline{Z}_2 \cdot \left|\underline{I}_2\right|^2 = -\text{j}200\Omega \cdot (1\text{A})^2 = \underline{\underline{0\text{W} - \text{j}200\text{var}}}$$

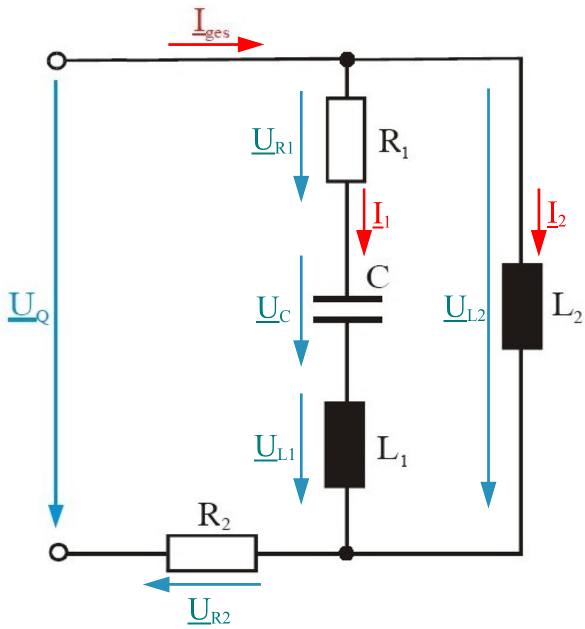
Eine andere Möglichkeit die beiden Teilströme zu berechnen ist, in dem man mittels der Spannung rechnet, die an den beiden Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ abfällt – nämlich $\underline{U}_Q$. Nach dem ohmschen Gesetz gilt: $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Q}{\underline{Z}_1}$. Die Spannung $\underline{U}_Q$ wird aus der Gleichung der Scheinleistung berechnet: $\underline{U}_Q = -\frac{\underline{S}_Q}{\underline{I}_Q^{\,*}}$. Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so erhält man: $\underline{I}_1 = -\frac{\underline{S}_Q}{\underline{I}_Q^{\,*} \cdot \underline{Z}_1}$. Weil man hier auch nur die Beträge benutzt, kann man auch schreiben: $\left|\underline{I}_1\right| = \left|-\frac{\underline{S}_Q}{\underline{I}_Q^{\,*} \cdot \underline{Z}_1}\right| = \frac{\left|\underline{S}_Q\right|}{\left|\underline{I}_Q^{\,*} \cdot \underline{Z}_1\right|} = \frac{\left|\underline{S}_Q\right|}{\left|\underline{I}_Q^{\,*}\right| \cdot \left|\underline{Z}_1\right|}$. Den unbekannten Betrag der Impedanz $\underline{Z}_1$ wird – wie weiter oben gezeigt – bestimmt. Analog dazu gilt: $\left|\underline{I}_2\right| = \frac{\left|\underline{S}_Q\right|}{\left|\underline{I}_Q^{\,*}\right| \cdot \left|\underline{Z}_2\right|}$.

Der Betrag der Scheinleistung wird mit dem Satz von Pythagoras berechnet, denn er liegt als Ergebnis in Komponentenform vor: $\left|\underline{S}_Q\right| = \sqrt{\left[\text{Re}\{\underline{S}_Q\}\right]^2 + \left[\text{Im}\{\underline{S}_Q\}\right]^2} = \sqrt{[-39{,}60\text{W}]^2 + [-196{,}04\text{var}]^2} = \sqrt{40000(\text{VA})^2}$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\left|\underline{S}_Q\right| = 200\text{VA}}}$$

Setzt man diese Zahlen ein, so ergeben sich als Ergebnis dieselben Werte wie mit der Stromteilerregel.

Zum Lösen dieser Aufgabe müssen erst alle Spannungen und Ströme in die Schaltung eingetragen werden, damit ein Bezug zur Rechnung hergestellt werden kann. Diese Schaltung wird erst einmal ohne die Kompensationskapazität C_K betrachtet.



Um die Schaltung im Zeigerdiagramm zu zeichnen, benötigt man als erstes die einzelnen Beträge der Größen. Einige kann man vor, andere erst nach Erstellen der Zeichnung berechnen. Begonnen wird mit der Reihenschaltung bestehend aus R_1, C und L_1, durch die der gegebene Strom $\underline{I}_1$ fließt, dessen Betrag bereits gegeben ist:

$$\underline{\underline{|\underline{U}_{R1}|}} = |\underline{I}_1 \cdot R_1| = |\underline{I}_1| \cdot R_1 = 100\text{mA} \cdot 100\Omega = \underline{\underline{10\text{V}}}$$

$$\underline{\underline{|\underline{U}_C|}} = |\underline{I}_1 \cdot j \cdot X_C| = |\underline{I}_1| \cdot |j \cdot X_C| = |\underline{I}_1| \cdot X_C = 100\text{mA} \cdot 100\Omega = \underline{\underline{10\text{V}}}$$

$$\underline{\underline{|\underline{U}_{L1}|}} = |\underline{I}_1 \cdot j \cdot X_{L1}| = |\underline{I}_1| \cdot |j \cdot X_{L1}| = |\underline{I}_1| \cdot X_{L1} = 100\text{mA} \cdot 65\Omega = \underline{\underline{6{,}5\text{V}}}$$

Die Spannung $\underline{U}_{L2}$ wird mittels des ersten Kirchhoffschen Satzes berechnet. Der Umlauf der Masche ist entgegengesetzt des Uhrzeigersinns. Also lautet diese Masche: $-\underline{U}_{L2} + \underline{U}_{R1} + \underline{U}_C + \underline{U}_{L1} = 0$.

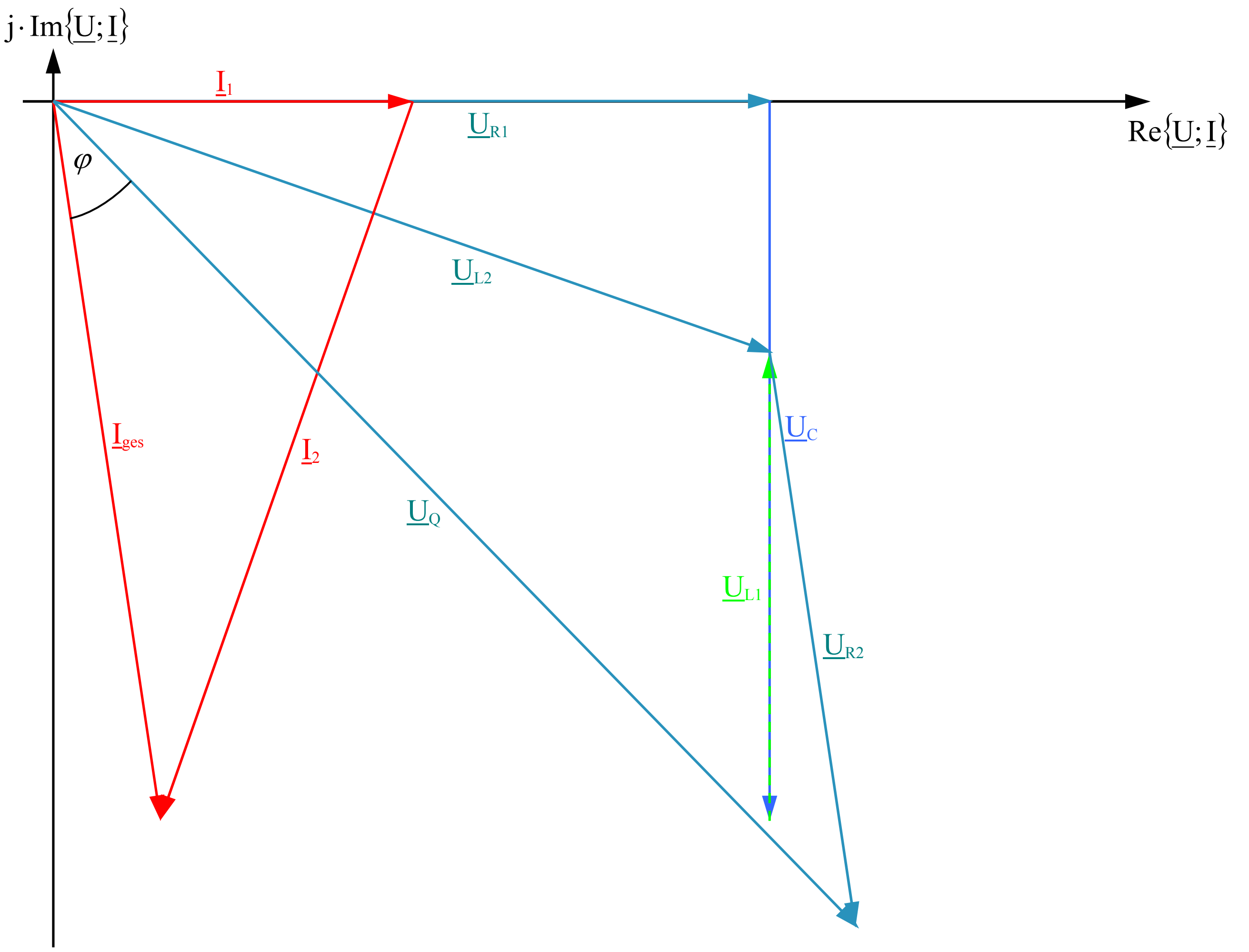
Umgestellt ergibt das: $\underline{U}_{L2} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_C + \underline{U}_{L1}$ (**geometrische Addition**). Der Betrag wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt, denn die Spannung am Widerstand liegt zu den beiden Spannungen an Induktivität und Kapazität um 90° verschoben. Diese liegen um 180° zueinander verschoben auf derselben Wirkungslinie. Daher gilt:

$$\underline{\underline{|\underline{U}_{L2}|}} = \sqrt{|\underline{U}_{R1}|^2 + (|\underline{U}_C| - |\underline{U}_{L1}|)^2} = \sqrt{(10\text{V})^2 + (10\text{V} - 6{,}5\text{V})^2} = \sqrt{100\text{V}^2 + 12{,}25\text{V}^2} = \sqrt{112{,}25\text{V}^2} \approx \underline{\underline{10{,}59\text{V}}}$$

Der Strom durch diese Induktivität kann nach dem ohmschen Gesetz berechnet werden:

$$\underline{\underline{|\underline{I}_2|}} = \left|\frac{\underline{U}_{L2}}{j \cdot X_{L2}}\right| = \frac{|\underline{U}_{L2}|}{|j \cdot X_{L2}|} = \frac{|\underline{U}_{L2}|}{X_{L2}} = \frac{10{,}59\text{V}}{50\Omega} = \underline{\underline{211{,}80\text{mA}}}$$

Damit sind alle Beträge, die ohne eine Zeichnung bestimmt werden können, berechnet. Jetzt zeichnet man das Zeigerdiagramm um die restlichen Größen zu ermitteln. Weil keine Größe mit einer Phase angegeben ist, kann die Anfangsgröße – der Strom $\underline{I}_1$ – willkürlich eingezeichnet werden. In diesem Fall liegt $\underline{I}_1$ auf der reellen Achse bei 0°.

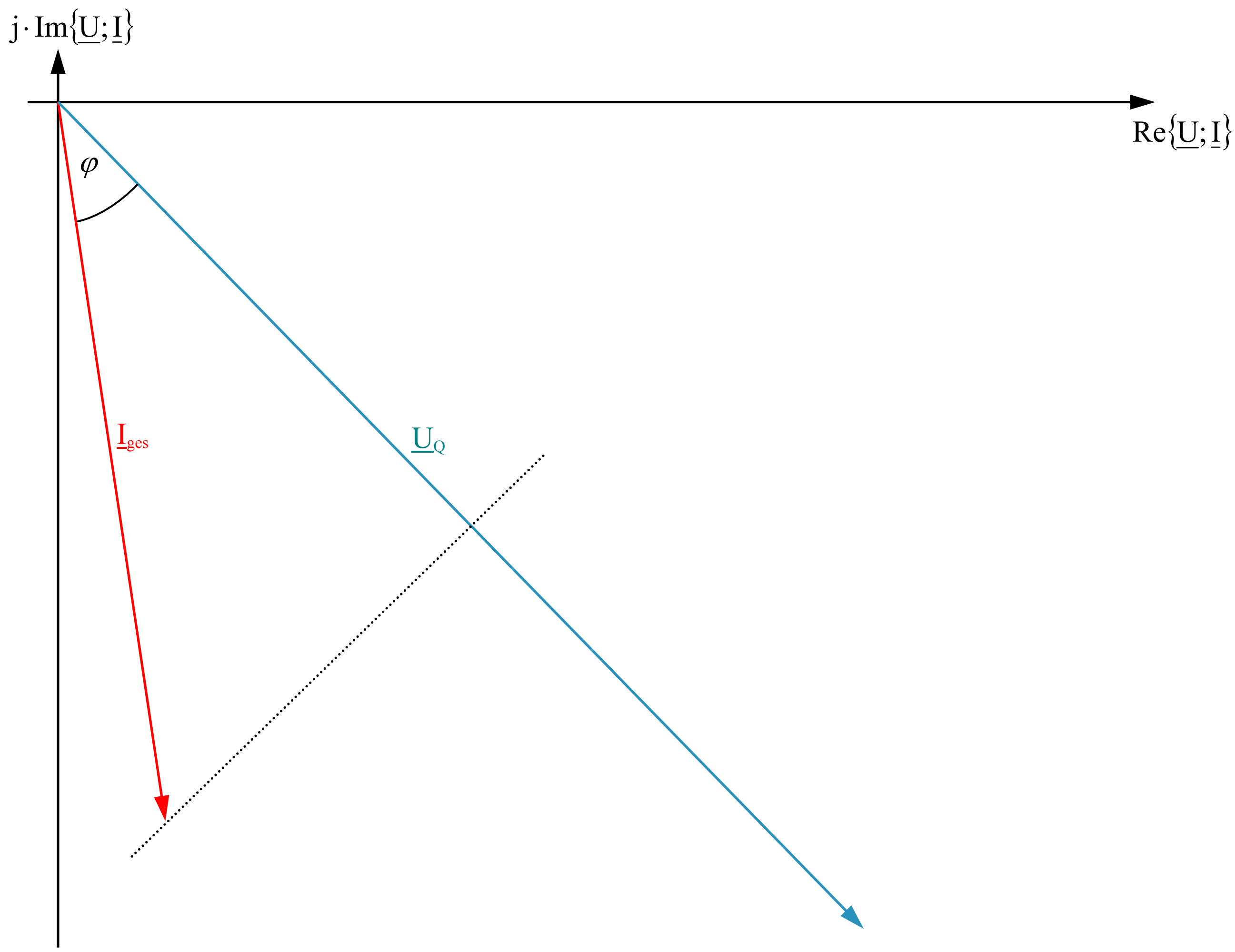


Aus der Zeichnung kann die Länge des Zeigers für den Gesamtstrom ermittelt werden: $\underline{\underline{\left|\underline{I}_{ges}\right|}} = 10{,}1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{202\text{mA}}}$. Damit kann die Spannung am Widerstand R_2 berechnet werden: $\underline{\underline{\left|\underline{U}_{R2}\right|}} = \left|\underline{I}_{ges} \cdot R_2\right| = \left|\underline{I}_{ges}\right| \cdot R_2 = 202\text{mA} \cdot 40\Omega = \underline{\underline{8{,}08\text{V}}}$. Die Länge des Zeigers der Gesamtspannung $\underline{U}_Q$ beträgt 16,04cm – damit ist auch $\underline{\underline{\left|\underline{U}_Q\right| = 16{,}04\text{V}}}$. Weil die Gesamtspannung dem Gesamtstrom um den Winkel φ voreilt, belastet diese Schaltung die Quelle induktiv.

Es sind alle Beträge berechnet und das Zeigerdiagramm gezeichnet worden. Jetzt geht es um die Größe des Blindwiderstandes X_{CK} der Kompensationskapazität.

Der Winkel φ zwischen dem Gesamtstrom und der Quellenspannung beträgt hier etwa 35°. Er soll auf einen Winkel reduziert werden, dessen Cosinus ein Ergebnis von 0,96 aufweist. $\cos(\varphi_K) = 0{,}96 \Leftrightarrow \underline{\underline{\varphi_K}} = \arccos(0{,}96) = \underline{\underline{16{,}26°}}$.

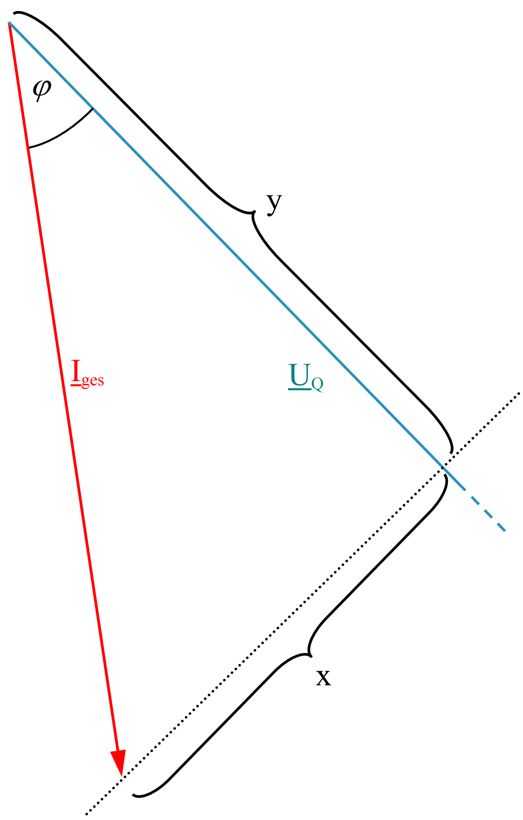
An der Kompensationskapazität liegt die komplette Quellenspannung $\underline{U}_Q$. Der Strom, der dort durchfließt, liegt also 90° voreilend zu dieser Spannung. Dieser Strom heißt $\underline{I}_3$ und kann am Ende von $\underline{I}_{ges}$ eingezeichnet werden, denn jetzt existieren drei Ströme. Die gestrichelte Linie gibt an, wie der Strom $\underline{I}_3$ einzuzeichnen ist. Wie groß der Betrag ist hängt von dem Winkel φ_K ab, der als resultierender Winkel angegeben ist.



Die Linie von $\underline{I}_{ges}$ wird auf der gestrichelten Linie so weit nach oben verlagert, bis der Winkel φ genau so groß ist wie der Winkel φ_K. Hat man dies zeichnerisch gelöst, so ergibt sich der Strom $\underline{I}_3$ mit einer Größe von 70mA. Damit lässt sich der Blindwiderstandes X_{CK} der Kompensationskapazität bestimmen:

$$\underline{\underline{X_{CK}}} = -\left|\frac{\underline{U}_Q}{\underline{I}_3}\right| = -\frac{|\underline{U}_Q|}{|\underline{I}_3|} = -\frac{16{,}04\text{V}}{70\text{mA}} = \underline{\underline{-229{,}14\Omega}}.$$

Natürlich lässt sich die Lösung auch rechnerisch (einfach) ermitteln. Die Länge des Zeigers $\underline{I}_{ges}$, die gestrichelte Linie vom Ende des Zeiger $\underline{I}_{ges}$ bis hin zum Schnittpunkt mit dem Zeiger von $\underline{U}_Q$ sowie das Stück des Zeigers $\underline{U}_Q$ vom Schnittpunkt mit der gestrichelten Linie bis zum Ursprung definieren ein rechtwinkliges Dreieck.



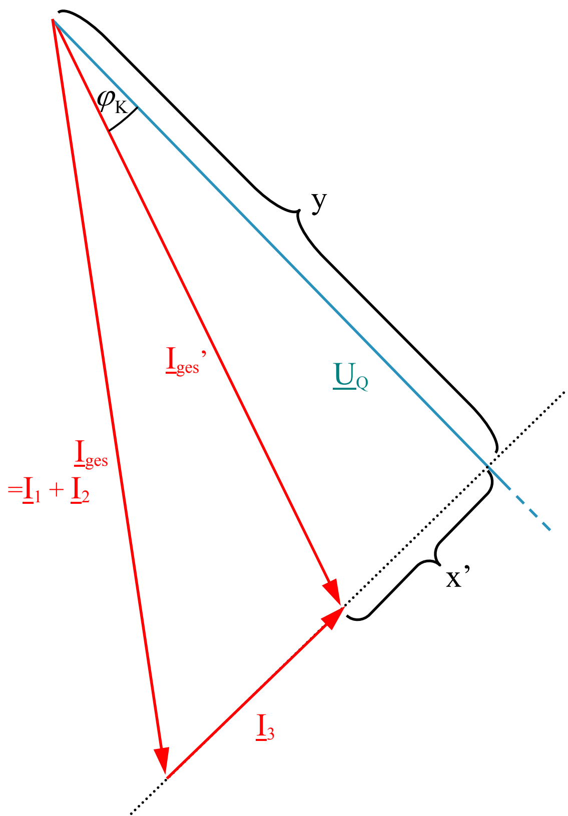
Der Einfachheit halber erfolgen alle weiteren Angaben in cm. Sie können jederzeit in die entsprechende Einheit umgewandelt werden.
Die Länge des Zeigers $\underline{I}_{ges}$ beträgt 10,1cm. Die beiden Katheten x und y können einfach ausgerechnet werden:

$$x = |\underline{I}_{ges}| \cdot \sin(\varphi) = 10{,}1\text{cm} \cdot \sin(35°) = 5{,}79\text{cm}$$
$$y = |\underline{I}_{ges}| \cdot \cos(\varphi) = 10{,}1\text{cm} \cdot \cos(35°) = 8{,}27\text{cm}$$

Die beiden Größen, die sich hier ändern, sind der Gesamtstrom und x. Denn der Strom $\underline{I}_{ges}$ wird auf der Wirkungslinie von x nach oben gedreht und dadurch verkürzt. Er heißt dann $\underline{I}_{ges}'$ und ist die Summe aus allen drei Strömen. Die Größe x' ist das verbleibende Stück aus der Differenz der Urpsrungsgröße x verkürzt um den Strom $\underline{I}_3$. Der jetzt resultierende Winkel zwischen Gesamtspannung und Gesamtstrom ist φ_K. Der ursprüngliche Winkel φ lässt sich durch den Arcustangens bestimmen: $\varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

Dasselbe gilt auch für den neuen resultieren Winkel φ_K. Hier heißt es: $\varphi_K = \arctan\left(\frac{x'}{y}\right)$. Umgestellt nach der unbekannten Größe x' ergibt sich: $x' = y \cdot \tan(\varphi_K)$. Mit Zahlenwerten: $x' = 8{,}27\text{cm} \cdot \tan(16{,}26°) = 2{,}41\text{cm}$. Die ursprüngliche Länge von x betrug 5,79cm. Das bedeutet, dass die Differenz aus x und x' der gesuchte Strom $\underline{I}_3$ ist: $|\underline{I}_3| = x - x' = 5{,}79\text{cm} - 2{,}41\text{cm} = 3{,}38\text{cm}$. Umgerechnet in die entsprechende Einheit erhält man: $|\underline{I}_3| = 3{,}38\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 67{,}60\text{mA}$. Mit diesem Ergebnis kann dier Blindwiderstand der Kompensationskapazität bestimmt werden:

$$\underline{\underline{X_{CK}}} = -\left|\frac{\underline{U}_Q}{\underline{I}_3}\right| = -\frac{|\underline{U}_Q|}{|\underline{I}_3|} = -\frac{16{,}04\text{V}}{67{,}60\text{mA}} = \underline{\underline{-237{,}28\Omega}}$$



Die Kompensationskapazität kann auch rein rechnerisch bestimmt werden. Zuerst wird die Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{ges}$ ohne Kompensationskapazität berechnet. Sie besteht aus der Reihenschaltung R_1, C und L_1 und liegt parallel zur Induktivität L_2. Zu dieser Parallelschaltung liegt der Widerstand R_2 in Reihe. Das bedeutet: $\underline{Z}_{ges} = \frac{(R_1 + jX_{L1} + jX_C)\cdot jX_{L2}}{R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} + jX_C} + R_2$.

Diesen Term muss man ausmultiplizieren und – um Realteil und Imaginärteil zu erhalten – mit der konjugiert komplexen Erweiterung multiplizieren.

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{(R_1 + jX_{L1} + jX_C)\cdot jX_{L2}}{R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} + jX_C} + R_2 = \frac{-X_{L1}X_{L2} - X_{L2}X_C + jR_1X_{L2}}{R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} + jX_C} + R_2$$

$$= \frac{-X_{L1}X_{L2} - X_{L2}X_C + jR_1X_{L2}}{R_1 + j\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)} \cdot \frac{R_1 - j\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1 - j\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)} + R_2$$

$$= \frac{R_1\cdot(-X_{L1}X_{L2} - X_{L2}X_C) + jR_1X_{L2}\cdot[-j\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)]}{R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2$$

$$+ j\cdot\frac{R_1\cdot R_1X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C)\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ges} = \underbrace{\frac{R_1X_{L2}^2}{R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2}_{\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{ges}\}=A} + \underbrace{j\cdot\frac{R_1^2X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C)\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2}}_{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_{ges}\}=B}$$

Um ein einfacheres Weiterrechnen zu ermöglichen, werden der Realteil von $\underline{Z}_{ges}$ mit A abgekürzt und der Imaginärteil mit B.

An dieser Stelle kann folgende Probe durchgeführt werden: Der Winkel φ beträgt nach Zeichnung 35°, das ist der Winkel zwischen $\underline{U}_Q$ und $\underline{I}_{ges}$ – also $\varphi_{\underline{Z}_{ges}}$. Diesen Winkel kann man berechnen, wenn man den Arcustangens vom Quotienten aus Imaginärteil und Realteil bildet:

$$\varphi_{\underline{Z}_{ges}} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_{ges}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{ges}\}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{R_1^2X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C)\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2}}{\frac{R_1X_{L2}^2}{R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{R_1^2X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C)\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1X_{L2}^2 + R_2\cdot\left[R_1^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2\right]}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{(100\Omega)^2\cdot 50\Omega + (65\Omega\cdot 50\Omega + 50\Omega\cdot(-100\Omega))\cdot(65\Omega + 50\Omega - 100\Omega)}{100\Omega\cdot(50\Omega)^2 + 40\Omega\cdot\left[(100\Omega)^2 + (65\Omega + 50\Omega - 100\Omega)^2\right]}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{473{,}75\mathrm{k}\Omega^3}{659\mathrm{k}\Omega^3}\right) = \arctan(0{,}718)$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{\underline{Z}_{ges}} = 35{,}17° \checkmark$$

Sobald die Kompensationskapazität in die Schaltung eingesetzt wird, ändert sich die Gesamtimpedanz. Sie heißt demnach nicht mehr $\underline{Z}_{ges}$ sondern zum Beispiel $\underline{Z}_{ges}^{*}$. Die neue Gesamtimpedanz ist die Parallelschaltung aus $\underline{Z}_{ges}$ und C_K. Das bedeutet: $\underline{Z}_{ges}^{*} = \frac{\underline{Z}_{ges} \cdot jX_{CK}}{\underline{Z}_{ges} + jX_{CK}} = \frac{(A + jB) \cdot jX_{CK}}{A + jB + jX_{CK}}$. Hierbei wird die vereinfachte Form der Impedanz $\underline{Z}_{ges}$ formuliert, also $\underline{Z}_{ges} = A + jB$ (siehe oben).
Diese Gleichung muss ebenfalls ausmultipliziert werden. Anschließend bildet man den Realteil und den Imaginärteil, denn der Arcustangens aus dem Quotienten ist der Winkel φ_K.

$$\underline{Z}_{ges}^{*} = \frac{(A + jB) \cdot jX_{CK}}{A + jB + jX_{CK}} = \frac{-BX_{CK} + jAX_{CK}}{A + j \cdot (B + X_{CK})} = \frac{-BX_{CK} + jAX_{CK}}{A + j \cdot (B + X_{CK})} \cdot \frac{A - j \cdot (B + X_{CK})}{A - j \cdot (B + X_{CK})}$$

$$= \frac{AX_{CK} \cdot (B + X_{CK}) - A \cdot BX_{CK}}{A^2 + (B + X_{CK})^2} + j \cdot \frac{AX_{CK} \cdot A + BX_{CK} \cdot (B + X_{CK})}{A^2 + (B + X_{CK})^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ges}^{*} = \underbrace{\frac{AX_{CK}^{2}}{A^2 + (B + X_{CK})^2}}_{\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{ges}^{*}\}} + j \cdot \underbrace{\frac{A^2X_{CK} + B^2X_{CK} + BX_{CK}^{2}}{A^2 + (B + X_{CK})^2}}_{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_{ges}^{*}\}}$$

Der Winkel φ_K wird berechnet aus dem Arcustangens des Quotienten aus Imaginärteil dividiert durch den Realteil:

$$\varphi_K = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}_{ges}^{*}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{ges}^{*}\}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{A^2X_{CK} + B^2X_{CK} + BX_{CK}^{2}}{A^2 + (B + X_{CK})^2}}{\frac{AX_{CK}^{2}}{A^2 + (B + X_{CK})^2}}\right) = \arctan\left(\frac{A^2X_{CK} + B^2X_{CK} + BX_{CK}^{2}}{AX_{CK}^{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\varphi_K) = \frac{A^2X_{CK} + B^2X_{CK} + BX_{CK}^{2}}{AX_{CK}^{2}}$$

$$\Leftrightarrow AX_{CK}^{2} \cdot \tan(\varphi_K) = A^2X_{CK} + B^2X_{CK} + BX_{CK}^{2}$$

$$\Leftrightarrow A^2X_{CK} + B^2X_{CK} + BX_{CK}^{2} - AX_{CK}^{2} \cdot \tan(\varphi_K) = 0$$

$$\Leftrightarrow (B - A \cdot \tan(\varphi_K)) \cdot X_{CK}^{2} + (A^2 + B^2) \cdot X_{CK} = 0$$

$$\Leftrightarrow (B - A \cdot \tan(\varphi_K)) \cdot X_{CK} + (A^2 + B^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow X_{CK} = -\frac{A^2 + B^2}{B - A \cdot \tan(\varphi_K)}$$

$$\Leftrightarrow X_{CK} = -\frac{\left(\frac{R_1X_{L2}^{2}}{R_1^{2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2\right)^2 + \left(\frac{R_1^{2}X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C) \cdot (X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^{2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2}\right)^2}{\frac{R_1^{2}X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C) \cdot (X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^{2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} - \left(\frac{R_1X_{L2}^{2}}{R_1^{2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2\right) \cdot \tan(\varphi_K)}$$

$$\Leftrightarrow X_{CK} = -\frac{\left(\frac{R_1 X_{L2}^{\ 2}}{R_1^{\ 2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2\right)^2 + \left(\frac{R_1^{\ 2} X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C)\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^{\ 2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2}\right)^2}{\frac{R_1^{\ 2} X_{L2} + (X_{L1}X_{L2} + X_{L2}X_C)\cdot(X_{L1} + X_{L2} + X_C)}{R_1^{\ 2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} - \left(\frac{R_1 X_{L2}^{\ 2}}{R_1^{\ 2} + (X_{L1} + X_{L2} + X_C)^2} + R_2\right)\cdot \tan(\varphi_K)}$$

$$\Leftrightarrow X_{CK} = -\frac{\left(\frac{100\Omega\cdot(50\Omega)^2}{(100\Omega)^2 + (15\Omega)^2} + 40\Omega\right)^2 + \left(\frac{(100\Omega)^2\cdot 50\Omega + (65\Omega\cdot 50\Omega - 50\Omega\cdot 100\Omega)\cdot(15\Omega)}{(100\Omega)^2 + (15\Omega)^2}\right)^2}{\frac{(100\Omega)^2\cdot 50\Omega + (65\Omega\cdot 50\Omega - 50\Omega\cdot 100\Omega)\cdot(15\Omega)}{(100\Omega)^2 + (15\Omega)^2} - \left(\frac{100\Omega\cdot(50\Omega)^2}{(100\Omega)^2 + (15\Omega)^2} + 40\Omega\right)\cdot \tan(16{,}26°)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{X_{CK}}} = -\frac{4{,}15\mathrm{k}\Omega^2 + 2{,}14\mathrm{k}\Omega^2}{46{,}33\Omega - 64{,}45\Omega\cdot\tan(16{,}26°)} = \underline{\underline{-228{,}46\Omega}}$$