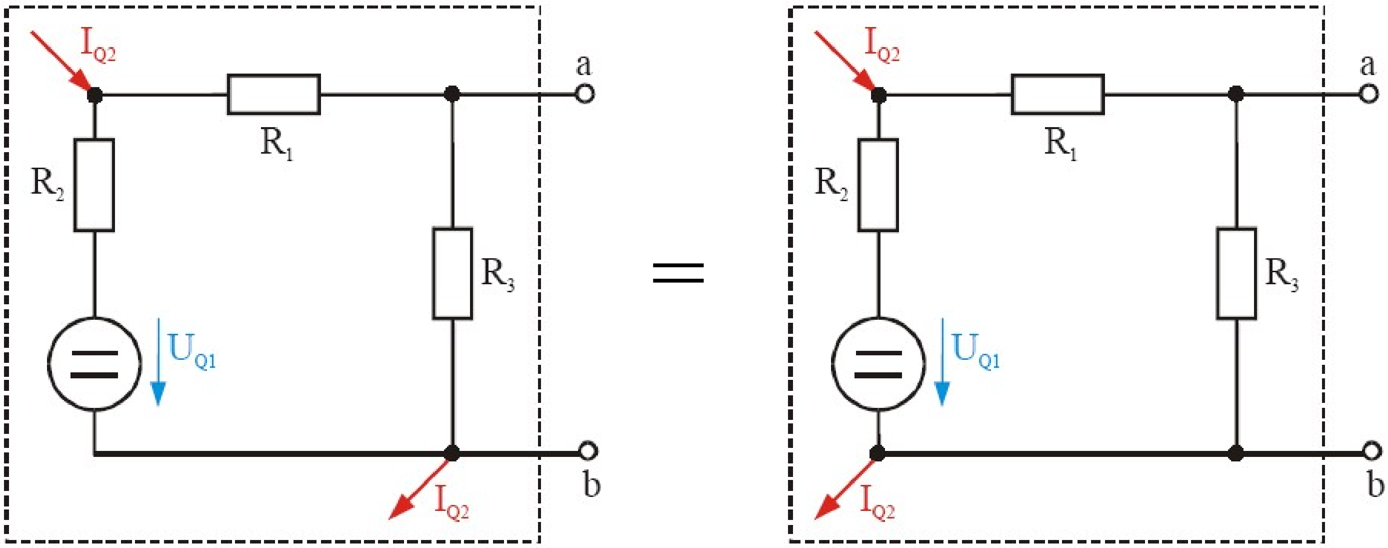
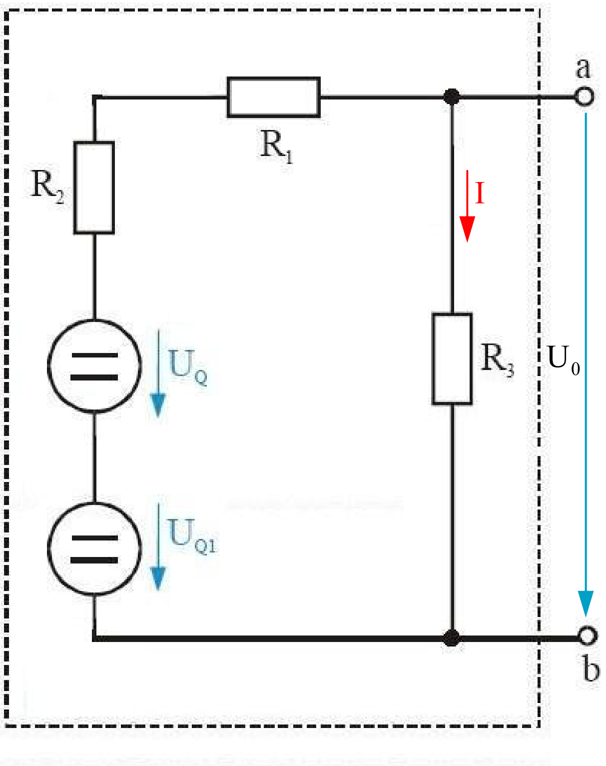
University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	# Prüfung 2007-1_1 Aufgabe ET2	Tutorium Seite-01 Stand: 19.03.2006; R0

Für eine einfachere Umwandlung muss das Netzwerk ein wenig umgezeichnet werden. Der untere Knotenpunkt von I_{Q2} kann weiter nach links verschoben werden, so dass zwei gleiche Knotenpunkte entstehen. Das geht deswegen, weil sich zwischen diesen beiden Knotenpunkten kein Bauteil befindet:



Jetzt kann man die Stromquelle I_{Q2} in eine Spannungsquelle umwandeln. Dabei spielt es keine Rolle, dass die Spannungsquelle U_{Q1} in Reihe zum Innenwiderstand der Stromquelle liegt – sie wird einfach vernachlässigt.



Der Pfeil der Spannungsquelle U_{Q2} zeigt von oben nach unten, weil im Leerlauf der Strom aus der Stromquelle durch den Widerstand R_2 von oben nach unten fließt. Zumindest ist das so durch die Pfeile in der Originalschaltung dargestellt. Der Strom ist – wie immer bei zwei Quellen, welche beide Strom abgeben – frei einzuzeichnen; danach muss diese Unbekannte gerechnet werden.

Die Schaltung besteht nur aus Spannungsquellen und Widerstände in Reihe geschaltet, so dass eine Berechnung des Stroms durch alle Bauelemente leicht erfolgen kann. Es gilt:

$\underline{\underline{U_{Q2}}} = I_{Q2} \cdot R_2 = -30\text{mA} \cdot 400\Omega = \underline{\underline{-12\text{V}}}$ und

$U_0 = I \cdot R_3$

Mit Hilfe einer Masche über alle Bauteile kann man den unbekannten Strom berechnen:

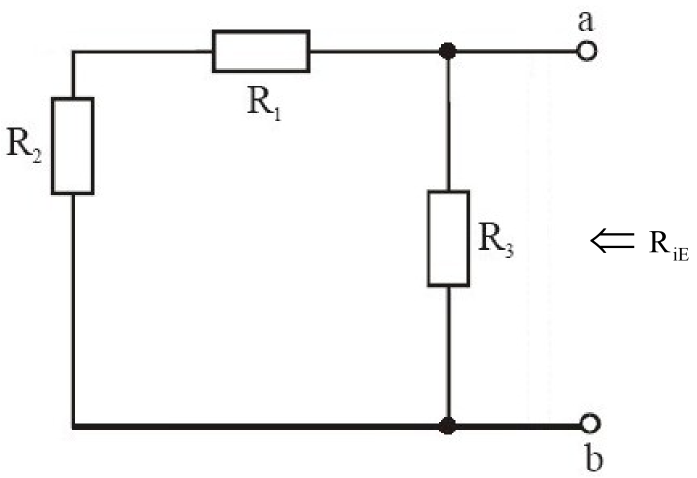
$$+U_{Q2} + U_{Q1} - I \cdot R_3 - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 = 0$$

Umgestellt nach I ergibt das: $I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = +U_{Q2} + U_{Q1}$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{I}} = \frac{U_{Q2} + U_{Q1}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{-12\,\text{V} + 10\,\text{V}}{200\,\Omega + 400\,\Omega + 300\,\Omega} = \frac{-2\,\text{V}}{900\,\Omega} = \underline{\underline{-2{,}\overline{2}\,\text{mA}}}$$

Das bedeutet, der Strom fließt nicht – wie angenommen – von oben nach unten, sondern von unten nach oben. Damit ergibt sich eine Leerlaufspannung von: $\underline{\underline{U_0 = U_{QE}}} = I \cdot R_3 = -2{,}\overline{2}\,\text{mA} \cdot 300\,\Omega = \underline{\underline{-0{,}\overline{6}\,\text{V}}}$.

Der Ersatzinnenwiderstand R_{iE} wird wie immer berechnet: Lastwiderstand entfernen, Spannungsquelle(n) kurzschließen, Stromquelle(n) auftrennen. Anschließend den Widerstand zwischen den Klemmen a und b von rechts bestimmen (also in die Schaltung hinein).

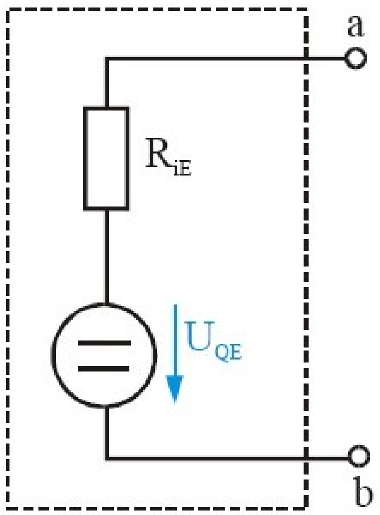


Hier liegen R_1 und R_2 in Reihe parallel zu R_3. Das ergibt für R_{iE}:

$$R_{iE} = (R_1 + R_2) \parallel R_3 = (200\,\Omega + 400\,\Omega) \parallel 300\,\Omega$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{R_{iE}}} = \frac{600\,\Omega \cdot 300\,\Omega}{600\,\Omega + 900\,\Omega} = \underline{\underline{200\,\Omega}}$$

Mit diesen Angaben ist die Ersatzquelle (Schaltung siehe unten) eindeutig bestimmt.



$U_{QE} = -0{,}\overline{6}\,\text{V}$

$R_{iE} = 200\,\Omega$

Diese Schaltung besteht aus zwei Wirkwiderständen $(R_1 \text{ und } R_2)$ sowie zwei Blindwiderständen $(X_L \text{ und } X_C)$. Die beiden Blindwiderstände kann man sehr einfach ermitteln, weil alle hierzu notwendigen Angaben gegeben sind: $\underline{\underline{X_L}} = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 3\text{kHz} \cdot 15{,}92\text{mH} \approx \underline{\underline{300\Omega}}$ und

$$\underline{\underline{X_C}} = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 3\text{kHz} \cdot 106{,}1\text{nF}} \approx \underline{\underline{-500\Omega}}$$

Um hieraus den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ (= Impedanz) zu bestimmen, muss man die ganze Schaltung in Realteil und Imaginärteil aufsplitten. Dabei entsprechen der Realteil der Summe der Wirkwiderstände und der Imaginärteil der Summe der Blindwiderstände. Man kann deswegen alle Widerstände – also Wirk- und Blindwiderstände für sich betrachtet– addieren, weil sie auf denselben Wirkungslinien liegen. Es gilt: $\underline{Z} = R + j \cdot X = (R_1 + R_2) + j \cdot (X_L + X_C)$

Setzt man hier alle Werte ein, so erhält man: $\underline{Z} = (300\Omega + 200\Omega) + j \cdot (300\Omega + (-500\Omega)) = 500\Omega - j \cdot 200\Omega$

Das negative Vorzeichen bei X_C rührt bekanntlich daher, weil der Pfeil für X_C in die entgegen gesetzte Richtung zeigt wie X_L. Mit anderen Worten: Sie liegen auf derselben Wirkungslinie, sind allerdings um 180° phasenverschoben. Diese Phasenverschiebung drückt man durch das negative Vorzeichen aus $(-1 = 1 \cdot e^{j180°})$. Um die Impedanz als Wert bestehend aus Betrag und Phase darzustellen, bedarf es einer einfachen Umrechnung: $\underline{Z} = R + j \cdot X = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_Z}$. Das bedeutet: $|\underline{Z}| = |R + j \cdot X| = \sqrt{R^2 + X^2}$ und ist somit die Länge des Zeigers $\underline{Z}$. Mit Werten: $|\underline{\underline{Z}}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(500\Omega)^2 + (-200\Omega)^2} = \sqrt{290000\Omega^2} \approx \underline{\underline{538{,}51\Omega}}$

Die Phase ist immer: $\underline{\underline{\varphi}} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{Z}\}}{\text{Re}\{\underline{Z}\}}\right) = \arctan\left(\frac{-200\Omega}{500\Omega}\right) = \arctan(-0{,}4) = \underline{\underline{-21{,}80°}}$

Demzufolge ist $\underline{Z} = 538{,}51\Omega \cdot e^{-j21{,}80°}$.

In der Elektrotechnik gilt: Spannung ist das Produkt aus Strom und Widerstand. Das gilt auch in diesem Fall: Die Gesamtspannung $\underline{U}_Q$ ist das Produkt aus dem (Gesamt)Strom $\underline{I}$ aus der Quelle sowie dem Gesamtwiderstand $\underline{Z}$. Stellt man diese Gleichung nach dem gesuchten Strom $\underline{I}$ um, erhält man:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{10\text{V} \cdot e^{j45°}}{538{,}51\Omega \cdot e^{-j21{,}80°}} = \frac{10\text{V}}{538{,}51\Omega} \cdot e^{j(45° - (-21{,}80°))} = \underline{\underline{18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°}}}$$

Mit diesem Strom und allen weiteren Widerständen können alle Spannungen an den einzelnen Bauteilen nach Betrag und Phase berechnet werden.

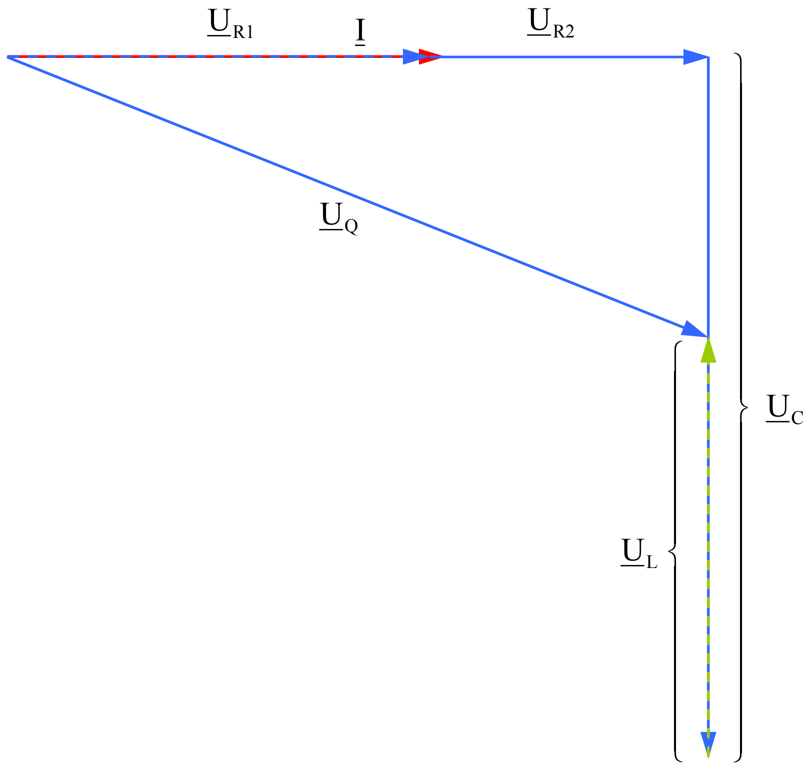
$$\underline{\underline{U_{R1}}} = \underline{I} \cdot R_1 = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°} \cdot 300\Omega = \underline{\underline{5{,}57\text{V} \cdot e^{j66{,}80°}}}$$

$$\underline{\underline{U_L}} = \underline{I} \cdot j \cdot X_L = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°} \cdot j \cdot 300\Omega = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°} \cdot \underbrace{1 \cdot e^{j90°}}_{j} \cdot 300\Omega = \underline{\underline{5{,}57\text{V} \cdot e^{j156{,}80°}}}$$

$$\underline{\underline{U_C}} = \underline{I} \cdot j \cdot X_C = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°} \cdot j \cdot (-500\Omega) = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°} \cdot \underbrace{1 \cdot e^{j90°}}_{j} \cdot \underbrace{\underbrace{1 \cdot e^{j180°}}_{-1} \cdot 500\Omega}_{-500\Omega} = \underline{\underline{9{,}28\text{V} \cdot e^{-j23{,}20°}}}$$

$$\underline{\underline{U_{R2}}} = \underline{I} \cdot R_2 = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{j66{,}80°} \cdot 200\Omega = \underline{\underline{3{,}71\text{V} \cdot e^{j66{,}80°}}}$$

Mit der Angabe der Beträge (also Länge) der einzelnen Spannungen sowie derer Winkel kann das Zeigerbild erstellt werden. Es wäre sogar möglich, wenn nur die Länge der Zeiger gegeben wären, weil die Winkel – also die Lage zueinander – von der Anordnung der Bauteile abhängt.



Mit dem Strom $\underline{I}$ liegen die beiden Spannungen $\underline{U}_{R1}$ und $\underline{U}_{R2}$ in Phase. Sie werden in die gleiche Richtung gezeichnet wie der Strom. Die Spannung $\underline{U}_C$ eilt dem Strom $\underline{I}$ um 90° hinterher, wird also nach unten gezeichnet. Dem entgegengesetzt ist die Spannung $\underline{U}_L$. Sie wird nach oben gezeichnet, weil sie dem Strom um 90° voreilt. Die geometrische Summe aus den beiden Spannungen an den Widerständen und den beiden Spannungen an den Blindwiderständen ergibt die Gesamtspannung $\underline{U}_Q$. Sie kann zur Kontrolle berechnet werden:

Der Realteil besteht aus den Spannungen an den Widerständen, der Imaginärteil aus den Spannungen an den Blindwiderständen. Somit gilt:

$$\underline{U}_Q = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_L + \underline{U}_C + \underline{U}_{R2} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{U}_Q\right| = \left|\underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_L + \underline{U}_C\right| = \sqrt{\left|\underline{U}_R\right|^2 + \left|\underline{U}_X\right|^2}$$

$$\left|\underline{U}_Q\right| = \sqrt{\left(\left|\underline{U}_{R1}\right| + \left|\underline{U}_{R2}\right|\right)^2 + \underbrace{\left(\left|\underline{U}_C\right| - \left|\underline{U}_L\right|\right)^2}_{\left|\underline{U}_X\right|^2}} = \sqrt{(5{,}57\text{V} + 3{,}71\text{V})^2 + (9{,}28\text{V} - 5{,}57\text{V})^2} = \sqrt{(9{,}28\text{V})^2 + (3{,}71\text{V})^2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\underline{U}_Q\right| = \sqrt{99{,}88\text{V}^2} \approx 10\text{V} \quad \checkmark$$

Die Spannung $\left|\underline{U}_R\right|$ ist die Länge der Spannung, welche der Summe aus $\left|\underline{U}_{R1}\right| + \left|\underline{U}_{R2}\right|$ entspricht. Das liegt daran, weil diese beiden Spannungen in die gleiche Richtung zeigen. Die Spannung $\left|\underline{U}_X\right|$ ist die Differenz der beiden Spannungen $\left|\underline{U}_C\right|$ und $\left|\underline{U}_L\right|$ an den Blindwiderständen. Diese Spannungen liegen zwar auf derselben Wirkungslinie, zeigen allerdings in die entgegen gesetzte Richtung. Es spielt keine Rolle, ob man $\left|\underline{U}_L\right|$ von $\left|\underline{U}_C\right|$ subtrahiert oder umgekehrt – durch das Quadrieren wird das Ergebnis in jedem Falle positiv.

Die Scheinleistung ist allgemein: $\underline{S} = P + j \cdot Q = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*}$. Der Strom $\underline{I}^{*}$ ist der konjugiert komplexe Strom. Er hat das umgekehrte Vorzeichen des Phasenwinkels beim Strom $\underline{I}$. Somit können die Leistungen an den beiden Bauteilen berechnen:

$$\underline{\underline{\underline{S}}}_{R1} = \underline{I}^{*} \cdot \underline{U}_{R1} = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{-j66{,}80^\circ} \cdot 5{,}57\text{V} \cdot e^{j66{,}80^\circ} = \underline{\underline{103{,}43\text{mW}}} = P_{R1}$$

$$\underline{\underline{\underline{S}}}_{C} = \underline{I}^{*} \cdot \underline{U}_{C} = 18{,}57\text{mA} \cdot e^{-j66{,}80^\circ} \cdot 9{,}28\text{V} \cdot e^{-j23{,}20^\circ} = 172{,}33\text{mvar} \cdot e^{-j90^\circ} = \underline{\underline{j \cdot (-172{,}33\text{mvar})}} = j \cdot Q_C$$