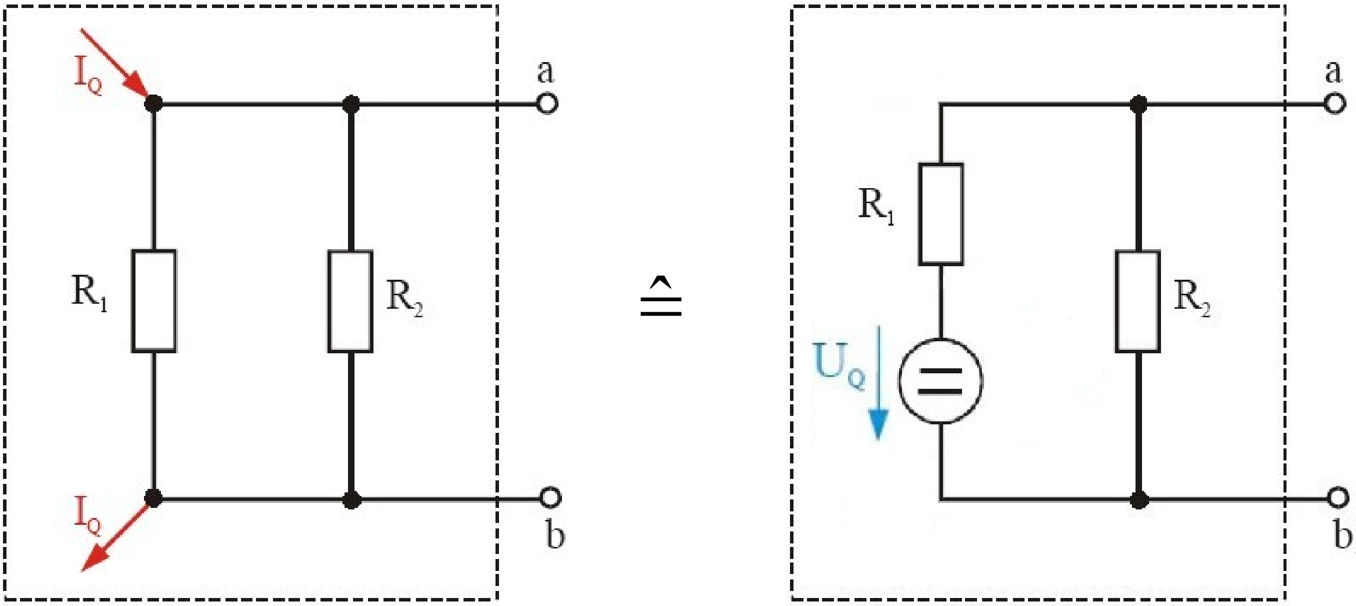
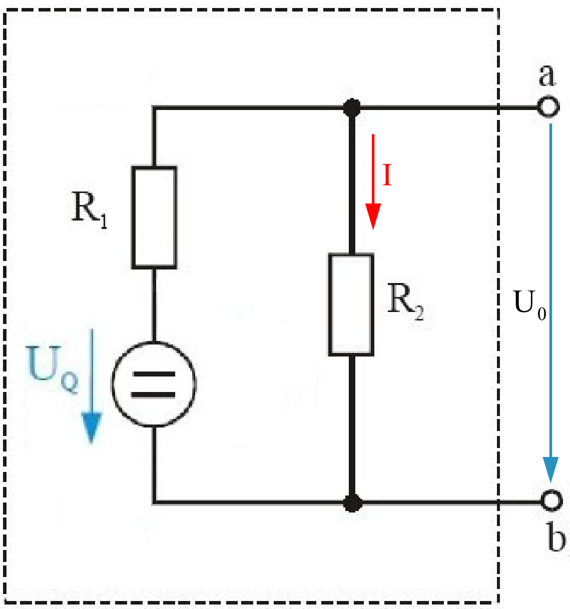
University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Prüfung 2006-3_1 Aufgabe ET2	Lösung Seite-01 Stand: 19.03.2006; R0

Für das Lösen dieser Aufgabe gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man wandelt die Stromquelle in eine Spannungsquelle um oder man belässt die Stromquelle und rechnet mit der Stromteilerregel.

Variante 1:



Der Innenwiderstand der Stromquelle ist der Widerstand R_1. Das bedeutet, im Leerlauf (nur für die Stromquelle betrachtet) fließt der Strom durch den Widerstand R_1 von oben nach unten und erzeugt eine Leerlaufspannung, welche der Quellenspannung U_Q entspricht. Das bedeutet:



$$\underline{\underline{U_Q}} = I_Q \cdot R_1 = 10\text{mA} \cdot 2\text{k}\Omega = \underline{\underline{20\text{V}}}$$

Nach der Umwandlung in eine Spannungsquelle liegen die beiden Widerstände R_1 und R_2 in Reihe, denn durch den Leerlauf teilt sich der Strom aus der Spannungsquelle nicht auf.

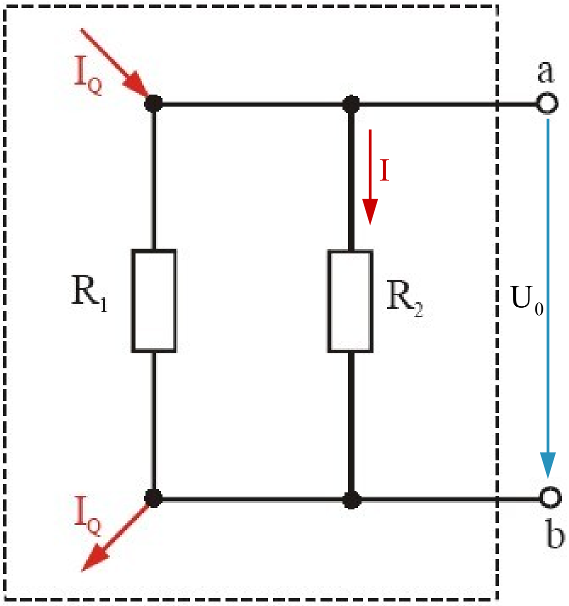
$$U_0 = I \cdot R_2$$

Die Spannung an R_2 kann man entweder bestimmen, in dem man die Spannungsteileregel anwendet oder den Strom I bestimmt und diesen mit dem Widerstand R_2 multipliziert. Durch eine Masche über alle Bauteile kann der Strom bestimmt werden: $+U_Q - I \cdot R_2 - I \cdot R_1 = 0$

Nach I aufgelöst: $U_Q = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2)$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{I}} = \frac{U_Q}{R_1 + R_2} = \frac{20\text{V}}{2\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega} = \underline{\underline{5\text{mA}}}$$

Schneller geht es mit Variante 2:



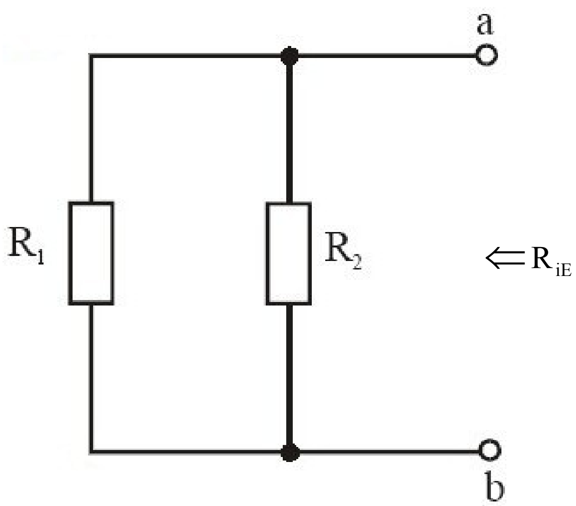
Der Strom I_Q aus der Stromquelle teilt sich auf: Ein Teil fließt über R_1, ein anderer Teil über R_2. Das Verhältnis, bzw. die Größe der jeweiligen Ströme über R_1 und R_2 kann man mittels Stromteilerregel bestimmen:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I_Q = \frac{2k\Omega}{2k\Omega + 2k\Omega} \cdot 10mA = 0{,}5 \cdot 10mA = \underline{\underline{5mA}}$$

Die Leerlaufspannung ist dann:

$$\underline{\underline{U_0 = U_{QE}}} = I \cdot R_2 = 5mA \cdot 2k\Omega = \underline{\underline{10V}}$$

Um den Ersatzinnenwiderstand R_{iE} zu bestimmen, wird der Lastwiderstand entfernt und die Stromquelle aufgetrennt. Danach bestimmt man den Widerstand zwischen den Klemmen a und b:



Die beiden Widerstände liegen parallel zueinander. Damit gilt:

$$\underline{\underline{R_{iE}}} = R1 \| R2 = 2k\Omega \| 2k\Omega = \frac{2k\Omega \cdot 2k\Omega}{2k\Omega + 2k\Omega} = \underline{\underline{1k\Omega}}$$

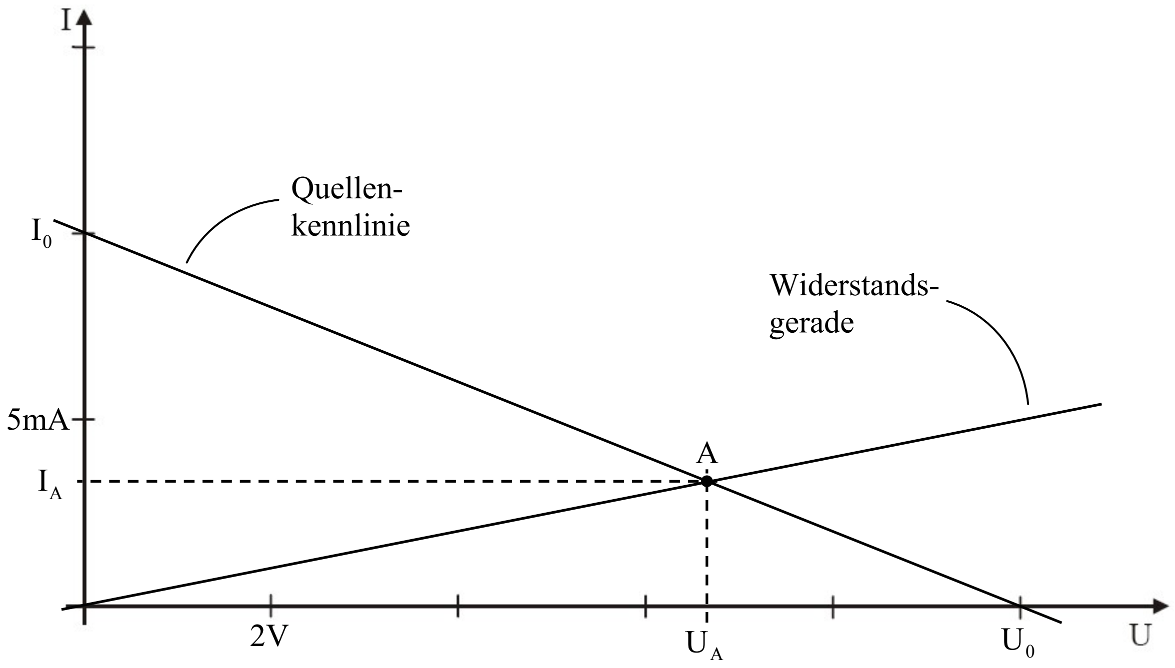
Mit den beiden Angaben U_{QE} und R_{iE} ist die Ersatzspannungsquelle bestimmt. Für eine zeichnerische Lösung muss noch der Kurzschlussstrom berechnet werden:

$$\underline{\underline{I_0}} = \frac{U_{QE}}{R_{iE}} = \frac{10V}{1k\Omega} = \underline{\underline{10mA}}$$

Die beiden Werte U_{QE} und I_0 bestimmen den Verlauf der Quellenkennlinie. Daneben existiert die Widertandsgerade, welche im Ursprung beginnt und zu der man noch den zweiten Punkt bestimmen muss. Dieser wird über das Ohmsche Gesetz definiert. Es wird ein frei definierter Strom angenommen und die an dem Widerstand R_a abfallende Spannung wird rechnerisch ermittelt. Dabei sollte man sich in den Grenzen von U_{QE} und I_0 (also 10V und 10mA) bewegen:

$$\underline{\underline{U}} = I \cdot Ra = 5mA \cdot 2k\Omega = \underline{\underline{10V}}$$

Diesen Punkt trägt man in das Diagramm mit ein. Der Schnittpunkt aus Quellenkennlinie und Widerstandsgerade ist der gesucht Arbeitspunkt mit der Spannung U_A und dem Strom I_A.



Die Werte für Spannung und Strom im Arbeitspunkt werden abgelesen. Sie betragen hier:

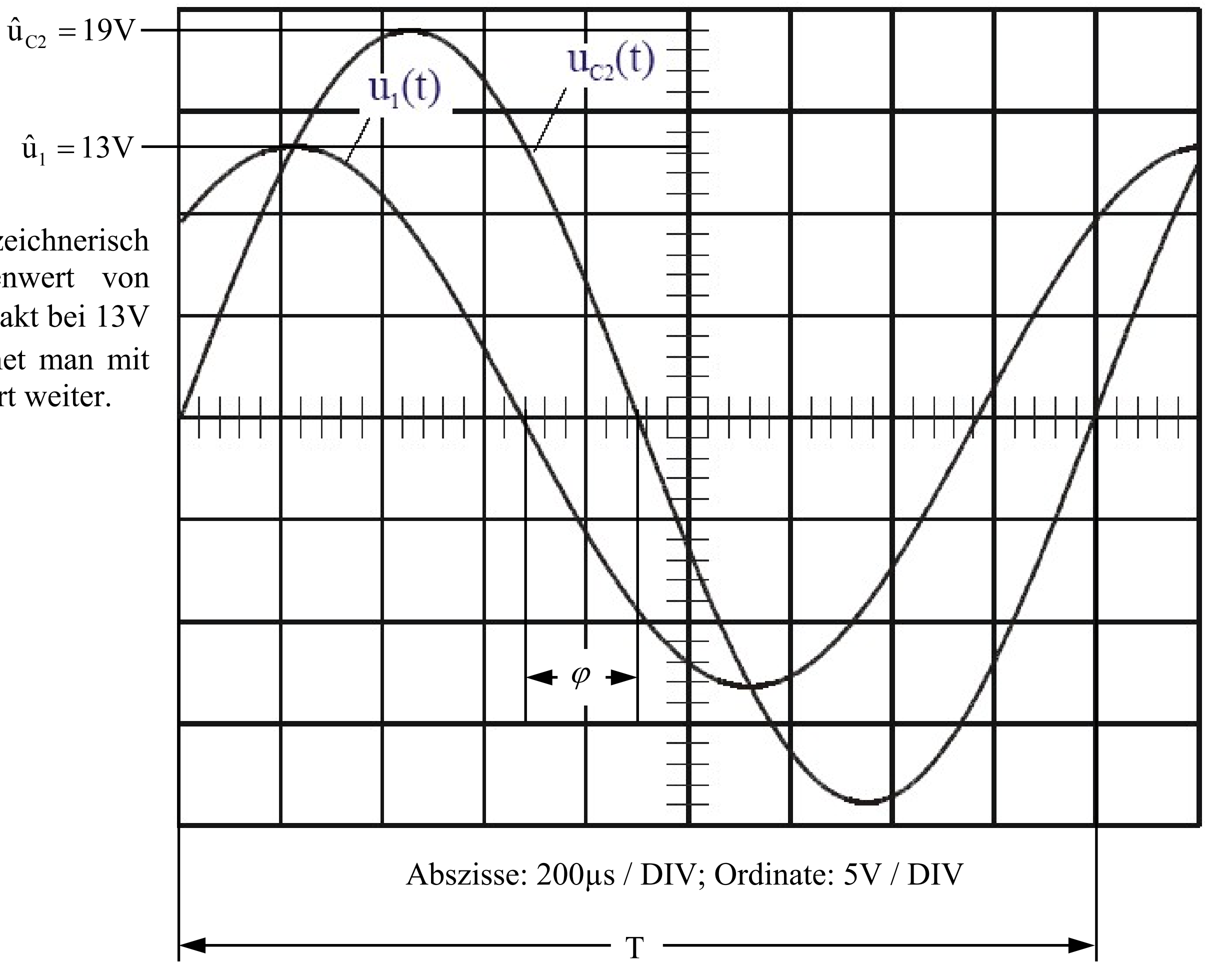
$\underline{\underline{I_A = 3\text{mA}}}$ und $\underline{\underline{U_A = 6{,}3\text{V}}}$

Zur Probe kann man die exakten Werte berechnen und mit denen aus dem Diagramm vergleichen:

$$\underline{\underline{I_A}} = \frac{U_{QE}}{R_{iE} + R_a} = \frac{10\text{V}}{1\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega} = \frac{10\text{V}}{3\text{k}\Omega} = \underline{\underline{3{,}\bar{3}\text{mA}}}$$

$$\underline{\underline{U_A}} = I_A \cdot R_a = 3{,}\bar{3}\text{mA} \cdot 2\text{k}\Omega = \underline{\underline{6{,}\bar{6}\text{V}}}$$

Für das weitere Vorgehen ist es nötig, alle Angaben als Effektivwerte vorliegen zu haben. Das bedeutet, aus dem Oszillogramm entnimmt man die Spitzenwerte der beiden Spannungen $u_1(t)$ sowie $u_{C2}(t)$ und dividiert sie durch $\sqrt{2}$. Die Effektivwerte entsprechen (in der Elektrotechnik) der Länge des Zeigers.



Obwohl zeichnerisch der Spitzenwert von u_1 nicht exakt bei 13V liegt, rechnet man mit diesem Wert weiter.

Die Effektivwerte betragen: $\underline{\underline{|\underline{U}_1|}} = u_{1\text{eff}} = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{13V}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{9{,}19V}}$ und

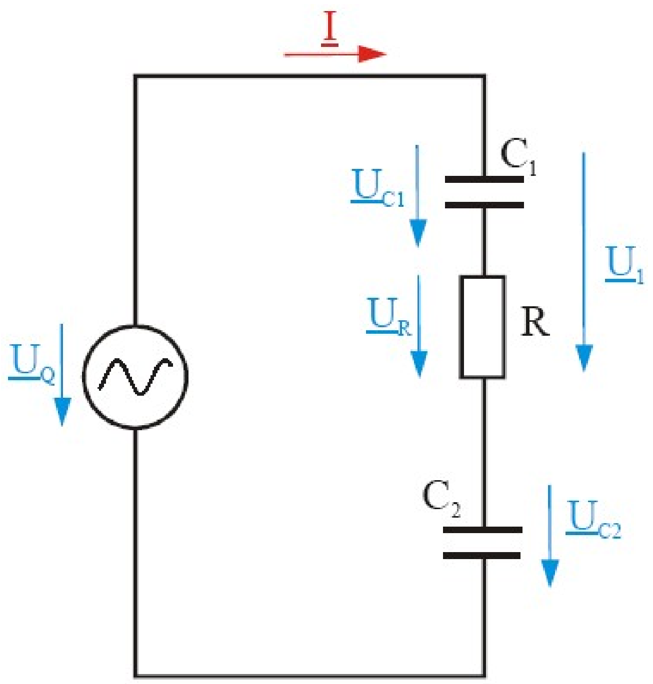
$$\underline{\underline{|\underline{U}_{C2}|}} = u_{C2\text{eff}} = \frac{\hat{u}_{C2}}{\sqrt{2}} = \frac{19V}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{13{,}43V}}$$

Im Oszillogramm ist deutlich zu erkennen, dass die Spannung $u_1(t)$ der Spannung $u_{C2}(t)$ um den Phasenwinkel φ voreilt. Aus der Einteilung der Abszisse kann man sehr leicht auf den Phasenwinkel schließen. Ein vertikaler Strich bedeutet 200µs – dieser setzt sich aus fünf Teilstrichen zusammen. Das bedeutet, jeder kleine Teilstrich entspricht 40µs. Bei der Phasenverschiebung φ sind dies 5,5 Teilstriche. Eine volle Periode (360° oder T) sind hier 1800µs, bzw. 1,8ms. Dies kann man an der Kurve $u_{C2}(t)$ ablesen: Man beginnt an der ansteigenden Flanke im Nulldurchgang (ganz links) und kommt dort wieder nach 9 vertikalen Strichen wieder an. Also gilt: $T = 1{,}8\text{ms} \mathrel{\hat{=}} 360°$ und

$$220\mu\text{s} \mathrel{\hat{=}} \varphi$$

Umgestellt nach φ erhält man: $\underline{\underline{\varphi}} = \frac{360° \cdot 220\mu s}{1800\mu s} = \underline{\underline{44°}}$

Aus der Schaltung heraus kann man verschiedene Zusammenhänge entnehmen, welche für das Zeichnen des Zeigerdiagramms nötig sind.



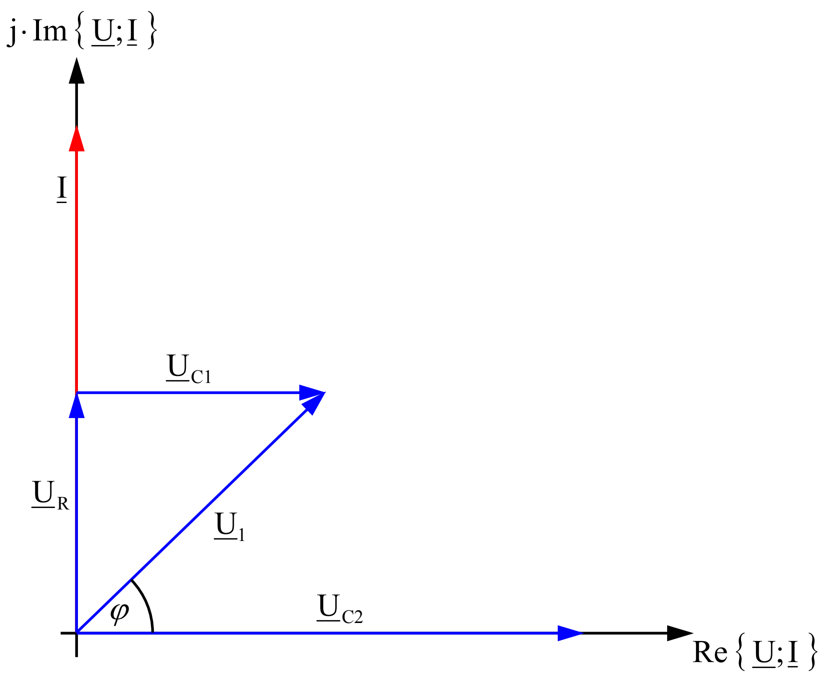
Als erstes betrachtet man die beiden oberen Bauteile C_1 und R. Die **geometrische** Summe ihrer beiden Spannungen $\underline{U}_{C1}$ und $\underline{U}_R$ ergibt $\underline{U}_1$ (2. Kirchhoffscher Satz).
Weiterhin gilt das Ohmsche Gesetz, also $\underline{U} = \underline{I}\cdot\underline{Z}$. Dieses wendet man auf den Kondensator C_2 an, denn sein Blindwiderstand ist mit $X_{C2} = -1k\Omega$ angegeben. Damit kann man den Strom $\underline{I}$ nach Betrag und Phase berechnen.

$$\underline{U}_{C2} = \underline{I}\cdot\underline{Z}_{C2} = \underline{I}\cdot j\cdot X_{C2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_{C2}}{j\cdot X_{C2}} = \frac{13{,}43V\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}}{j\cdot(-1k\Omega)} = j\cdot\frac{13{,}43V\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}}{1k\Omega}$$

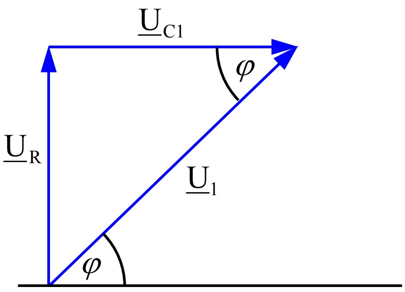
$$= j\cdot 13{,}43mA\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = \underline{\underline{13{,}43mA\cdot e^{j(\omega\cdot t+90°)}}}$$

Weil $\frac{1}{j} = -j$ ist wird es mit dem negativen Vorzeichen des Blindwiderstands X_{C2} zu einem +j. In der Zeile darunter wird das j in die Eulersche Form umgewandelt, also $j = 1\cdot e^{j90°}$. Aus den drei Größen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_{C2}$ und $\underline{I}$ lässt sich bereits ein fast fertiges Zeigerdiagramm zeichnen. Dabei ist es vollkommen willkürlich, welche Größe man als Bezugsgröße nimmt und wie man sie zeichnet. Entscheidend ist, dass sich alle weiteren Größen aus diesem Startwert heraus ableiten.



Hier wurde als Startwert die Spannung $\underline{U}_{C2}$ gewählt, weil sie im Oszillogramm beim Wert 0 beginnt. Daher wurde sie auf die reelle Achse gelegt. Diese Spannung eilt dem Strom, welcher durch den Kondensator fließt, um 90° nach. Das bedeutet, der Strom wird um 90° voreilend gezeichnet und liegt auf der komplexen Achse. Das hier der gezeichnete Strom der Winkelangabe in der Rechnung (+90°) entspricht ist reiner Zufall. Bei einer anderen Startwinkelangabe für $\underline{U}_{C2}$ würde der Strom ebenfalls anders liegen, allerdings immer 90° voreilend zur Spannung.
Um den Winkel φ (also 44°) eilt die

Spannung $\underline{U}_1$ der Spannung $\underline{U}_{C2}$ vor. Sie wird ebenfalls eingezeichnet. Die Länge ist bei allen Größen dem Maßstab entsprechend anzupassen.
Die beiden verbleibenden Spannungen $\underline{U}_{C1}$ und $\underline{U}_R$ ergeben als **geometrische** Summe $\underline{U}_1$, jedoch ist die Länge der beiden Zeiger nicht bekannt. Diese kann auf zwei Wegen ermittelt werden. Zum einen geht das zeichnerisch. Weil die Spannung $\underline{U}_R$ in Phase mit dem Strom ist, wird sie ebenfalls nach oben auf die komplexe Achse gezeichnet. In einem Winkel vom 90° nacheilend zeichnet man die Spannung $\underline{U}_{C1}$ ein. Sie beginnt dort, wo die Spannung $\underline{U}_R$ aufhört. Das heißt, man muss die Spannung $\underline{U}_R$ so groß einzeichnen, so dass die Summe aus $\underline{U}_{C1}$ und $\underline{U}_R$ zeichnerisch $\underline{U}_1$ ergibt.



Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass man aus der Geometrie heraus beide Spannungen rechnerisch bestimmt. Denn der Winkel φ existiert nicht nur zwischen $\underline{U}_1$ und der reellen Achse, sondern ebenfalls zwischen $\underline{U}_{C1}$ und $\underline{U}_1$. Damit gilt:

$$\underline{\underline{\left|\underline{U}_R\right|}} = \left|\underline{U}_1\right| \cdot \sin(\varphi) = 9{,}19\text{V} \cdot \sin(44°) = \underline{\underline{6{,}38\text{V}}}$$

$$\underline{\underline{\left|\underline{U}_{C1}\right|}} = \left|\underline{U}_1\right| \cdot \cos(\varphi) = 9{,}19\text{V} \cdot \cos(44°) = \underline{\underline{6{,}61\text{V}}}$$

Mit diesen Größen lassen sich die Größen R und C_1 bestimmen:

$$\underline{\underline{R}} = \left|\frac{\underline{U}_R}{\underline{I}}\right| = \frac{\left|\underline{U}_R\right|}{\left|\underline{I}\right|} = \frac{6{,}38\text{V}}{14{,}34\text{mA}} = \underline{\underline{444{,}91\Omega}}$$

$$\underline{\underline{-X_{C1}}} = \left|\frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{I}}\right| = \frac{\left|\underline{U}_{C1}\right|}{\left|\underline{I}\right|} = \frac{6{,}61\text{V}}{14{,}34\text{mA}} = \underline{\underline{460{,}95\Omega}} \text{ bzw. } \underline{\underline{X_{C1} = -460{,}95\Omega}}$$

Es gilt ebenfalls für den Blindwiderstand X_{C1}:

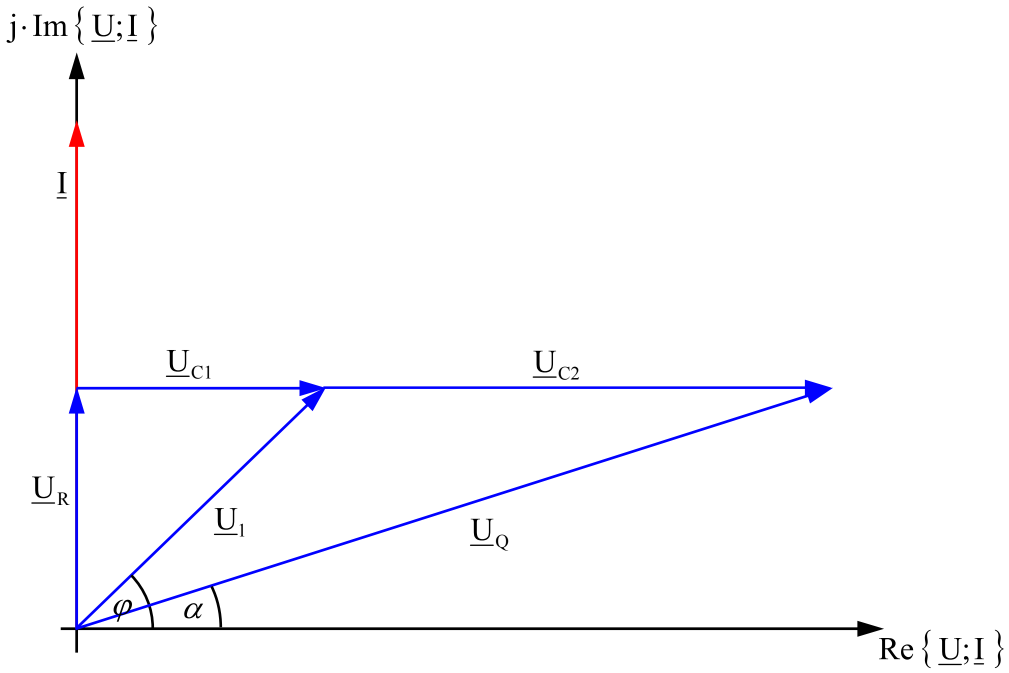
$$X_{C1} = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_{C1}} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot X_{C1}}$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1{,}8\text{ms}} \cdot -460{,}95\Omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{C = 621{,}49\text{nF}}}$$

Die Spannung $\underline{U}_Q$ ergibt sich aus der **geometrischen** Summe der drei Einzelspannungen $\underline{U}_{C1}$, $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_{C2}$. Zeichnerisch kann man die Spannung $\underline{U}_{C2}$ ans Ende von $\underline{U}_1$ legen, denn sie beginnt dort wo $\underline{U}_1$ aufhört. Das bedeutet, die Spannung $\underline{U}_Q$ kann aus dem Zeigerdiagramm direkt abgelesen werden.



Die Länge des Zeigers $\underline{U}_Q$ beträgt 10,5cm – dies entspricht 21V. Der Phasenwinkel α beträgt hier 17°.

Rechnerisch wird die Spannung $\underline{U}_Q$ wie folgt bestimmt:

$$\underline{U}_Q = \underline{U}_{C1} + \underline{U}_R + \underline{U}_{C2} = \underline{I} \cdot j \cdot X_{C1} + \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot j \cdot X_{C2} = \underline{I} \cdot \left[R + j \cdot \left(X_{C1} + X_{C2}\right)\right]$$

$$= 14{,}34\mathrm{mA} \cdot e^{j(\omega \cdot t + 90°)} \cdot \left[444{,}91\Omega + j \cdot \left(\left(-460{,}95\Omega\right) + \left(-1\mathrm{k}\Omega\right)\right)\right] = 14{,}34\mathrm{mA} \cdot e^{j(\omega \cdot t + 90°)} \cdot \underbrace{\left(444{,}91\Omega - j \cdot 1{,}46\mathrm{k}\Omega\right)}_{1{,}52\mathrm{k}\Omega \cdot e^{-j73{,}05°}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\underline{U}_Q}} = 14{,}34\mathrm{mA} \cdot e^{j(\omega \cdot t + 90°)} \cdot 1{,}52\mathrm{k}\Omega \cdot e^{-j73{,}05°} = \underline{\underline{21{,}79\mathrm{V} \cdot e^{j(\omega \cdot t + 16{,}95°)}}}$$