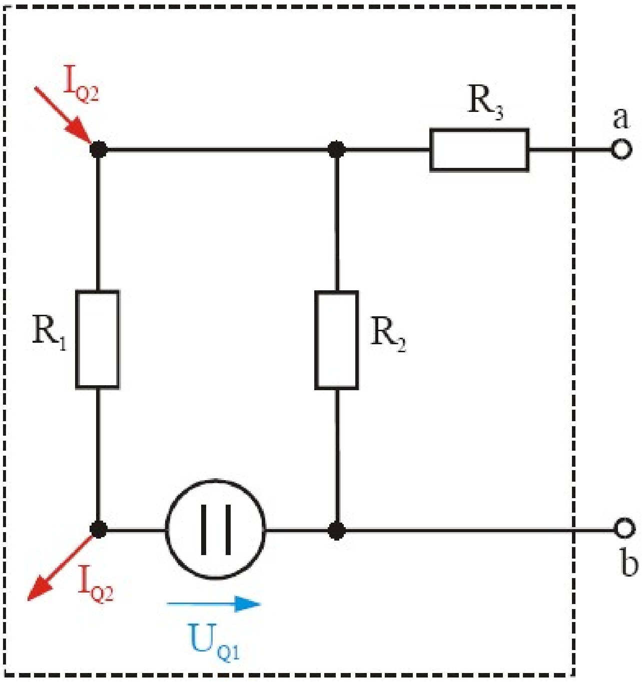
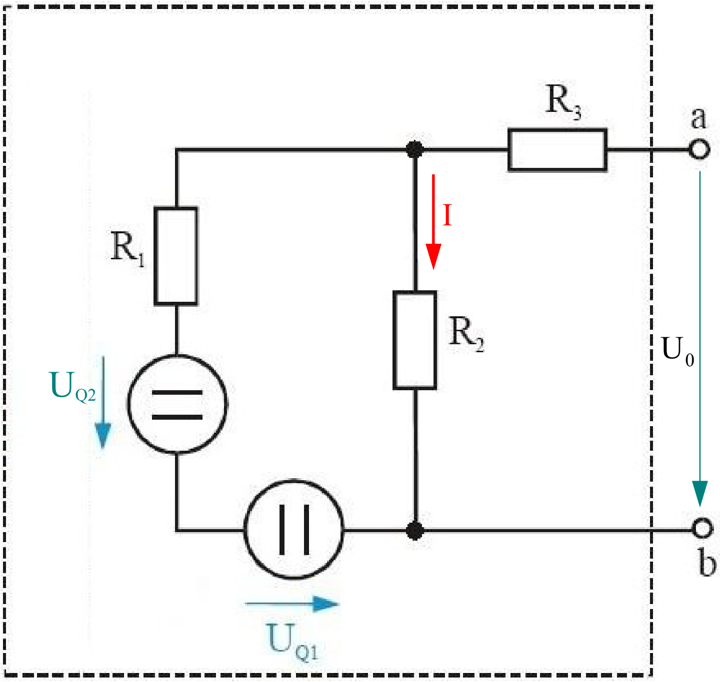
University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Prüfung 2006-2_1 Aufgabe ET2	Lösung Seite-01 Stand: 19.03.2006; R0

Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass der Strom aus der Stromquelle negativ ist. Das bedeutet, dass man die Pfeilrichtung umdreht und mit einem positiven Strom weiterrechnet.



Die obere Klemme von I_{Q2} kann nach links verschoben werden, denn zwischen der Originalposition oberhalb von R_2 und der versetzten Position bei R_1 befindet sich kein Bauteil. Hier ist auch deutlich zu sehen, dass der Widerstand R_1 der Innenwiderstand der Stromquelle ist. Das heißt, die Reihenschaltung aus R_2 und U_{Q1} stellt die Last für die Stromquelle dar.
Für die Umwandlung der Stromquelle in eine Spannungsquelle betrachtet man diese im Leerlauf. Folglich fließt der ganze Strom über den Innenwiderstand R_1 und erzeugt eine Leerlaufspannung von oben nach unten, welche der Spannung an der Ersatzquelle U_{Q2} entspricht. Diese Spannung muss demzufolge auch von oben nach unten abfallen.

Damit hat man eine Reihenschaltung bestehend aus den beiden Quellen U_{Q1} und U_{Q2} sowie den Widerständen R_1 und R_2. Es fließt ein einziger Strom in diesem Kreis. Durch den Widerstand R_3 fließt kein Strom, weil dieser an der offenen Klemme a liegt.
Die Festlegung über die Richtung des Stroms I erfolgt willkürlich. Jedoch ist ersichtlich, dass die Spannungen an beiden Quellen von oben nach unten zeigen. Das bedeutet, aus beiden Quellen fließt der Strom nach oben heraus und der Gesamtstrom I fließt demzufolge im Uhrzeigersinn.
Definiert man die Spannung U_0, so legt man hierzu einfach eine Masche über die Bauteile R_2, R_3 und die Spannung U_0. Weil die Spannung an R_3 Null ist, gilt:



$$-U_0 + I \cdot R_2 = 0 \Leftrightarrow U_0 = I \cdot R_2$$

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Prüfung 2006-2_1 Aufgabe ET2	Lösung Seite-02 Stand: 19.03.2006; R0

Die Masche in der Reihenschaltung links ist für die Berechnung des unbekannten Stroms erforderlich:

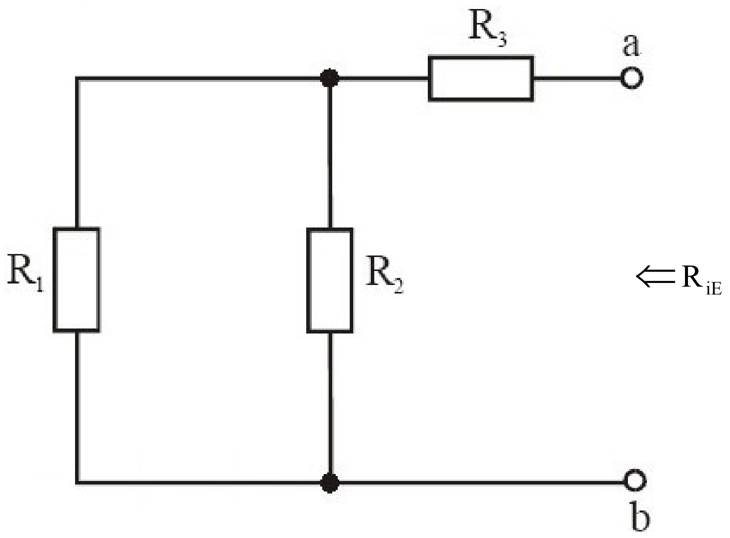
$$-U_{Q1} - U_{Q2} + I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow U_{Q1} + U_{Q2} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{I}} = \frac{U_{Q1} + U_{Q2}}{R_1 + R_2} = \frac{U_{Q1} + I_{Q2} \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{20V + 100mA \cdot 100\Omega}{100\Omega + 250\Omega} = \frac{30V}{350\Omega} = \underline{\underline{85{,}71mA}}$$

Mit dieser Größenangabe kann man die Leerlaufspannung berechnen:

$$\underline{\underline{U_0 = U_{QE}}} = I \cdot R_2 = 85{,}71mA \cdot 250\Omega = \underline{\underline{21{,}42V}}$$



Für den Ersatzinnenwiderstand wird die Stromquelle aufgetrennt und die Spannungsquelle kurzgeschlossen. Danach bestimmt man den Widerstand von rechts nach links zwischen den Klemmen a und b:

$$R_{iE} = R_1 \| R_2 + R_3 = 100\Omega \| 250\Omega + 500\Omega$$

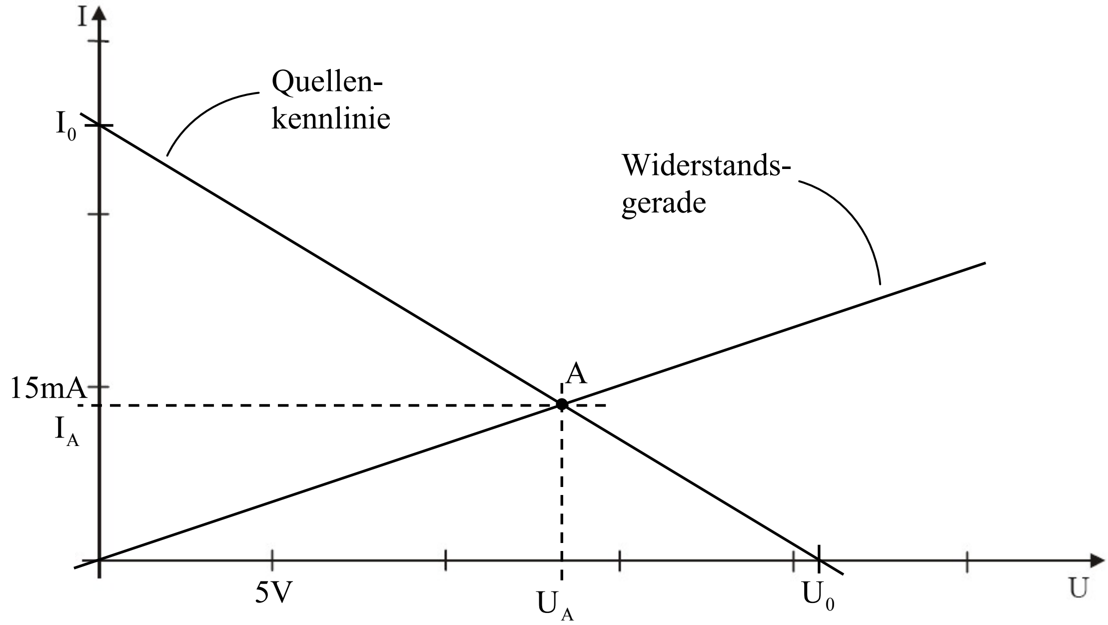
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{R_{iE}}} = 71{,}43\Omega + 500\Omega = \underline{\underline{571{,}43\Omega}}$$

Für eine zeichnerische Lösung benötigt man noch den Kurzschlussstrom:

$$\underline{\underline{I_0}} = \frac{U_{QE}}{R_{iE}} = \frac{21{,}42V}{571{,}43\Omega} = \underline{\underline{37{,}48mA}}$$

Mit den Werten Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom lässt sich die Quellenkennlinie in das Diagramm einzeichnen.

Was noch fehlt ist die Widerstandsgerade für R_a. Sie kann – wie jede Gerade – durch zwei Punkte definiert werden, denn die Steigung ist konstant. Passive Bauteile wie ein Widerstand gehen alle durch den Ursprung. Damit ist ein Punkt festgelegt. Der andere ist frei wählbar. Hierfür nimmt man das Ohmsche Gesetz: Der Strom wird festgelegt und man errechnet die am Widerstand abfallende Spannung. Dabei sollte der Strom so gewählt werden, so dass dieser Punkt innerhalb des Diagramms liegt. $\underline{\underline{U}} = I \cdot R_a = 15mA \cdot 1k\Omega = \underline{\underline{15V}}$



Die Werte für Spannung und Strom im Arbeitspunkt werden abgelesen. Sie betragen hier:

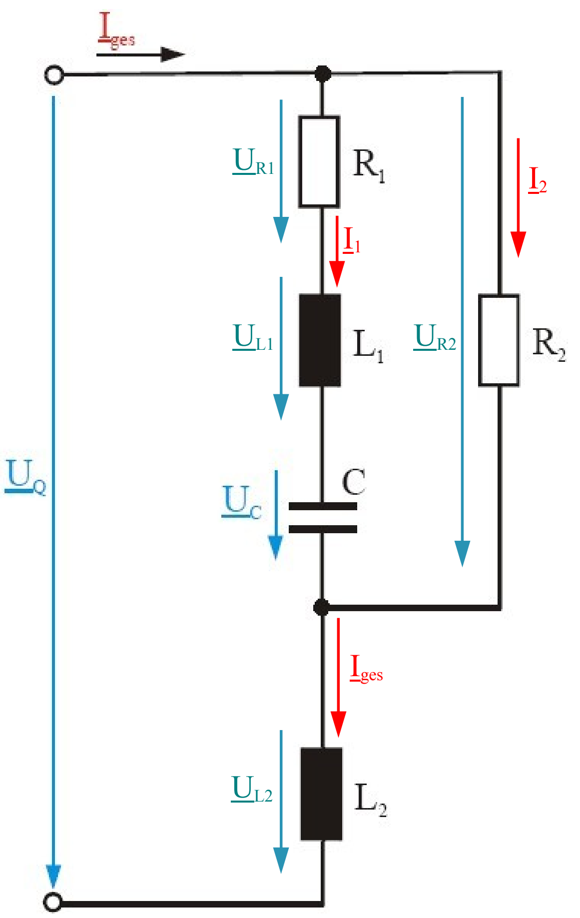
$\underline{\underline{I_A = 14\text{mA}}}$ und $\underline{\underline{U_A = 13\text{V}}}$

Zur Probe kann man die exakten Werte berechnen und mit denen aus dem Diagramm vergleichen:

$$\underline{\underline{I_A}} = \frac{U_{QE}}{R_{iE} + R_a} = \frac{21{,}42\text{V}}{571{,}43\Omega + 1\text{k}\Omega} = \frac{21{,}42\text{V}}{1{,}57\text{k}\Omega} = \underline{\underline{13{,}63\text{mA}}}$$

$$\underline{\underline{U_A}} = I_A \cdot R_a = 13{,}63\text{mA} \cdot 1\text{k}\Omega = \underline{\underline{13{,}63\text{V}}}$$

Vor dem Zeichnen dieses Zeigerdiagramms werden erst alle Spannungen und Ströme in die Schaltung eingezeichnet und alle Beträge (soweit möglich) berechnet.



$$\left|\underline{I}_1\right| = \left|\frac{\underline{U}_C}{j \cdot X_C}\right| = \frac{\left|\underline{U}_C\right|}{\left|j \cdot X_C\right|} = \frac{\left|\underline{U}_C\right|}{\left|X_C\right|} = \frac{20V}{30\Omega} = \underline{\underline{0{,}\overline{6}A}}$$

$$\left|\underline{U}_{R1}\right| = \left|\underline{I}_1 \cdot R_1\right| = \left|\underline{I}_1\right| \cdot R_1 = 0{,}\overline{6}A \cdot 15\Omega = \underline{\underline{10V}}$$

$$\left|\underline{U}_{L1}\right| = \left|\underline{I}_1 \cdot j \cdot X_{L1}\right| = \left|\underline{I}_1\right| \cdot \left|j \cdot X_{L1}\right| = \left|\underline{I}_1\right| \cdot X_{L1} = 0{,}\overline{6}A \cdot 30\Omega = \underline{\underline{20V}}$$

$$\underline{\underline{\left|\underline{U}_C\right| = 20V}} \text{ (gegeben)}$$

Die Spannung am Widerstand R_2 ist die **geometrische** Summe aus den Spannungen $\underline{U}_{R1}$, $\underline{U}_{L1}$ und $\underline{U}_C$. Hier liegen die beiden Spannungen $\underline{U}_{L1}$ und $\underline{U}_C$ auf ein und derselben Wirkungslinie, denn bei einem Kondensator eilt die Spannung dem Strom 90° nach, bei der Induktivität 90° vor. Also liegt zwischen $\underline{U}_{L1}$ und $\underline{U}_C$ eine Phasenverschiebung von 180° vor. Mit anderen Worten: Je nach Größe subtrahiert man $\left|\underline{U}_{L1}\right|$ von $\left|\underline{U}_C\right|$ oder umgekehrt. Für den im Radikanten ist dies irrelevant, denn durch das Quadrieren wird das negative Vorzeichen negiert. Es gilt:

$$\left|\underline{U}_{R2}\right| = \sqrt{\left|\underline{U}_{R1}\right|^2 + \left(\left|\underline{U}_{L1}\right| - \left|\underline{U}_C\right|\right)^2} = \sqrt{(10V)^2 + (20V - 20V)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\left|\underline{U}_{R2}\right|} = \sqrt{100V^2} = \underline{10V} \Rightarrow \underline{U}_{R2} = \underline{U}_{R1} \text{ weil } \left|\underline{U}_{L1}\right| - \left|\underline{U}_C\right| = 0$$

$$\left|\underline{I}_2\right| = \left|\frac{\underline{U}_{R2}}{R_2}\right| = \frac{\left|\underline{U}_{R2}\right|}{R_2} = \frac{10V}{10\Omega} = \underline{\underline{1A}}$$

Es wäre auch möglich gewesen, die Spannung $\left|\underline{U}_{R2}\right|$ zeichnerisch zu ermitteln. Jedoch müsste man hierzu erst einmal die anderen Spannungen einzeichnen. Einfacher geht es, wenn man diese Spannung berechnet und anschließend alles zeichnet.

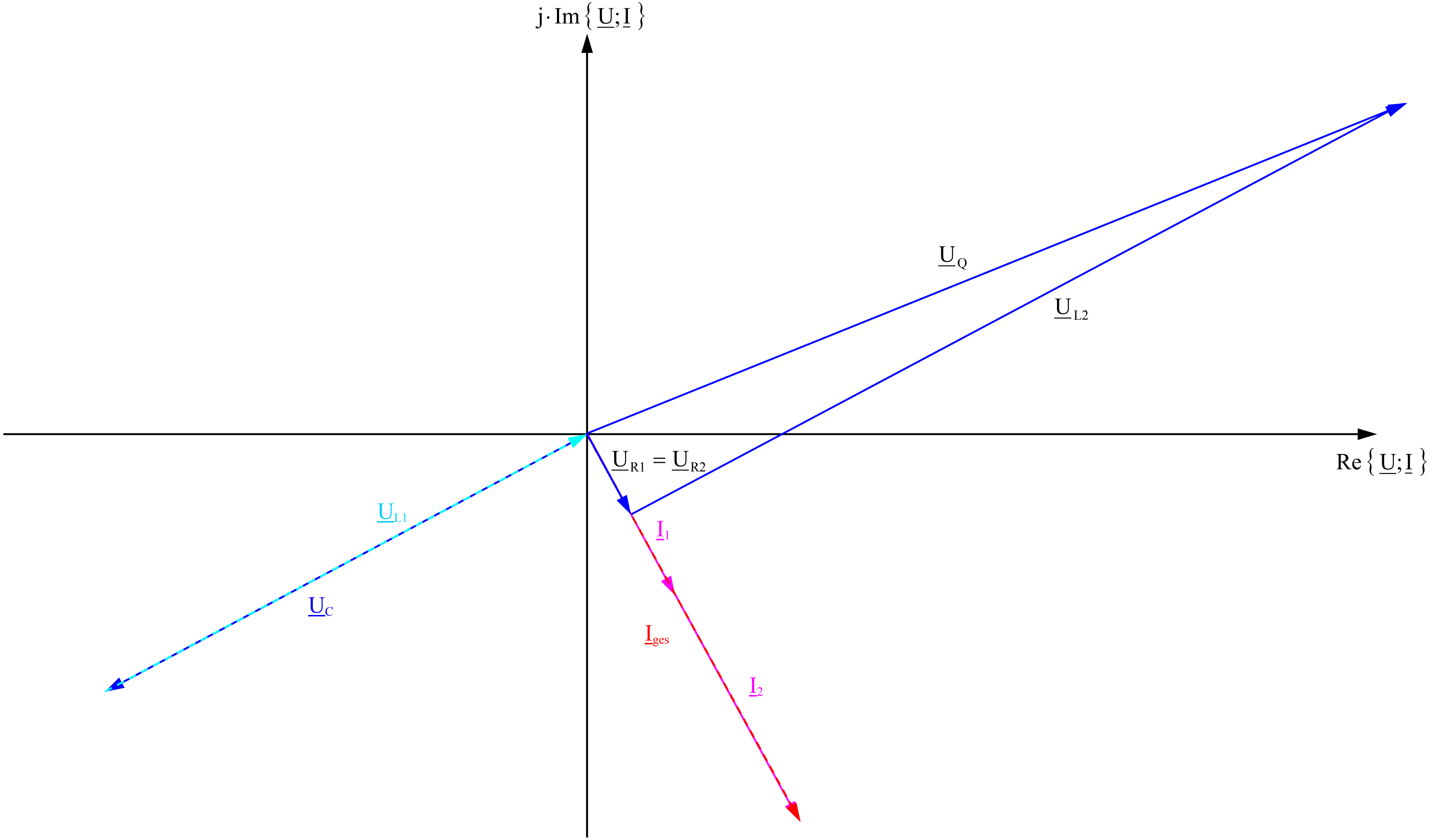
Der Gesamtstrom kann bei dieser Schaltung direkt berechnet werden. Das liegt daran, weil die beiden Spannungen $\underline{U}_{L1}$ und $\underline{U}_C$ gleich groß sind – sie zeigen nur jeweils in die entgegen gesetzte Richtung. Wie bereits in der Rechnung zu $\left|\underline{U}_{R2}\right|$ deutlich zu sehen, sind die Spannungen an den beiden Widerständen R_1 und R_2 identisch. Das heißt: Auch beide Ströme liegen auf ein und derselben Wirkungslinie, denn sie sind in Phase mit der Spannung, die an beiden Widerständen abfällt.

Es gilt: $\underline{I}_{ges} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ bzw. $\underline{\underline{\left|\underline{I}_{ges}\right|}} = \left|\underline{I}_1\right| + \left|\underline{I}_2\right| = 0{,}\overline{6}A + 1A = \underline{\underline{1{,}\overline{6}A}}$

Mit dieser Angabe kann die verbleibende Spannung $\left|\underline{U}_{L2}\right|$ ausgerechnet und gezeichnet, anschließend die Quellenspannung $\underline{U}_Q$ zeichnerisch ermittelt werden:

$$\underline{\underline{\left|\underline{U}_{L2}\right|}} = \left|\underline{I}_{ges} \cdot j \cdot X_{L2}\right| = \left|\underline{I}_{ges}\right| \cdot \left|j \cdot X_{L2}\right| = \left|\underline{I}_{ges}\right| \cdot X_{L2} = 1{,}\overline{6}A \cdot 20\Omega = \underline{\underline{33{,}\overline{3}V}}$$

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	# Prüfung 2006-2_1 Aufgabe ET4	# Lösung Seite-05 Stand: 19.03.2006; R0



Zuerst wurde hier die angegebene Spannung $\underline{U}_C$ eingezeichnet. Direkt nach $\underline{U}_C$ kommt in der Schaltung die Spannung $\underline{U}_{L1}$. Sie ist genauso groß und um 180° phasenverschoben. Also liegen beide Spannungen aufeinander, die Pfeile zeigen in die jeweils entgegen gesetzte Richtung – mit anderen Worten: Sie heben sich auf. Um 90° nacheilend (bzw. voreilend) liegt der Strom zur Spannung an der Induktivität (Kapazität). In Phase mit diesem Strom liegt die Spannung am Widerstand R_1; sie zeigt also in die gleiche Richtung. Weil sich die Spannungen an den beiden Blindwiderständen X_{L1} und X_C aufheben, ist die Spannung am parallel liegenden Widerstand R_2 genauso groß wie R_1 und liegt in Phase. Es gilt: $\underline{U}_{R2} = \underline{U}_{R1} + \underbrace{\underline{U}_{L1} + \underline{U}_C}_{=0} = \underline{U}_{R1}$.

Mit der Phasenlage von $\underline{U}_{R2}$ ist auch die Lage von $\underline{I}_2$ bekannt: Bei einem Ohmschen Widerstand liegen Spannung und Strom in Phase. Das bedeutet: $\underline{I}_2$ liegt auf derselben Wirkungslinie wie $\underline{I}_1$. Aus diesem Grunde kann man die beiden Ströme einfach addieren. Oder man entnimmt die Länge von $\underline{I}_{ges}$ aus der Zeichnung und rechnet dies in die Stromstärke um.

Zum Strom $\underline{I}_{ges}$ ist die Spannung an X_{L2} um 90° voreilend. Weil diese Spannung dort beginnt wo $\underline{U}_C$ aufhört, wird sie auch am Ende von $\underline{U}_C$ angesetzt. Die Summe aus den Spannungen $\underline{U}_{R2}\left(= \underline{U}_{R1}\right)$ und $\underline{U}_{L2}$ ergibt $\underline{U}_Q$. Die Länge ist 16,14cm und dies entspricht: $\underline{\underline{\left|U_Q\right| = 16{,}14\text{V}}}$.

Weil die Quellenspannung $\underline{U}_Q$ dem Gesamtstrom $\underline{I}_{ges}$ voreilt, belastet diese Schaltung die Quelle induktiv.